

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$f(g(x)) = 3x - 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι αντιστρέψιμη.

β. Να δείξετε ότι η  $f$  έχει σύνολο τιμών όλο το  $\mathbb{R}$ .

γ. Αν γνωρίζετε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα, να λύσετε την ανίσωση:  $g(\ln x) < g(-x + 1)$

δ. Αν η  $g(x)$  έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι και η  $f$  είναι 1-1. (Μη θεωρήσετε δεδομένη τη μονοτονία της  $f$  από το γ ερώτημα).

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση:  $(f \circ f)(x) = f(x) + 3 - x, x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1 και να βρείτε το  $f(3)$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν μπορεί να είναι γνήσια φθίνουσα.

γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $f(6 - f(|x - 2| - 1)) = 3$

δ. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) + f^{-1}(x) = x + 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:  $f(x) = x^3 + ax + 4$ , όπου η γραφική παράσταση της  $f \circ f$  τέμνει τον  $yy'$  στο σημείο με τεταγμένη 80.

α. Να αποδείξετε ότι  $a=3$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $f(f(9 - x^2) + x - 2) - f(x + 2) = 0$

δ. Να λύσετε την ανίσωση:  $f(f(|x| - 1) - 18) < f^{-1}(80)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:  $f(x) = e^x + \frac{1 - e^x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = 5\sin x - 4, x \in [0, \pi]$

α. Να αποδείξετε ότι η  $f(x)$  έχει ελάχιστη τιμή το 1.

β. Να βρείτε τη μονοτονία της  $g(x)$  και να λύσετε την εξίσωση  $g(x)=1$ .

γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{e^x + e^{-x} + 3}{5} = \sin x$

δ. Να λύσετε την εξίσωση:  $e^{|x|-1} + e^{1-|x|} = 2$

5. Δίνεται η γνήσιως μονότονη συνάρτηση  $f$  για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$e^{f(1)} + 2f(1) - 1 = 0 \text{ και } \ln(f(2)) + 3f(2) - 3 = 0.$$

α. Να υπολογίσετε τα  $f(1)$  και  $f(2)$ .

β. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f(x)$ .

γ. Να λύσετε την ανίσωση:  $f(\ln x + x) < 0$

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:  $g(x) = x - 4\sqrt{x} + 4, x \in [0, 4]$

α. Να βρείτε την  $(g \circ g)(x)$ .

β. Να βρείτε την συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει η σχέση:  $(g \circ f)(x) = 2x - 1$

γ. Αν για μια συνάρτηση  $h(x)$  ισχύει ότι  $(g \circ h)(x) = x$ , μπορούμε να πούμε ότι  $h(x)=g(x)$ ;

7. Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία γνωρίζουμε ότι:  $(f \circ f)(x) = x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1 και έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ .

β) Να αποδείξετε ότι:  $f^{-1}(x) = f(x) + 2$

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν τέμνει την ευθεία  $y=x$ .

δ) Αν η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία  $y=x$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in [1, +\infty)$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Έχει ακρότατο;

β) Να βρείτε την  $f^{-1}$  και να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τις γραφικές παραστάσεις των  $f, f^{-1}$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $x^2 - 2x - \sqrt{x+1} = 1$

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6, \quad x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $x^3 - \sqrt[3]{x+6} = 6, \quad x \in \mathbb{R}$ .

γ) να λύσετε την ανίσωση:  $f(|x| - 15) < -33$

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{2\}$

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής της  $f^{-1}$  με τους άξονες.

γ) Να λυθεί η εξίσωση:  $f^{-1}\left(\frac{6-2e}{e-2} + f(\ln x)\right) = 1$

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x-2}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{3\}$

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την ανίσωση:  $(f \circ f)^2(\ln x) - (f \circ f)(\ln x) - 2 < 0$

γ) Να βρείτε συνάρτηση  $g$  τέτοια ώστε:  $f(g(x)) = x + 2$

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2}{x} - e^{x-1} - 1, \quad x \in (0, +\infty)$

α) Να βρείτε τη μονοτονία της  $f$  και να λύσετε την εξίσωση  $f(x)=0$ .

β) Να βρείτε το  $f^{-1}(-e)$ , καθώς και τη μονοτονία της  $f^{-1}$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f^{-1}(x) = x + 1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{\sqrt{1+3x^2} - \sqrt{x^2+4}}{(1+\sqrt{1+3x^2}) \cdot (1+\sqrt{x^2+4})} = \frac{e^{\sqrt{x^2+4}} - e^{\sqrt{1+3x^2}}}{2}$

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + e^{x-2} - 3, \quad x \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το  $f^{-1}(0)$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = 1$ .

γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $f^{-1}(\ln 2x) < 2$

δ) Να λυθεί η εξίσωση:  $f(1 + f^{-1}(x - 2)) = 0$

ε) Να λυθεί η εξίσωση:  $|x|^{-x^2} = e^{x^2-2} - e^{|x|} - 2$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ,  $g(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

α) Να ελέγξετε αν  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h(x) = (g \circ f)(\ln x)$  στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $h(\ln x) + h(x) - 1 = 0$ .

γ) Να βρείτε συνάρτηση  $t(x)$  τέτοια ώστε:  $f(t(x)) = g(f(\ln x))$

15. Να επινοήσετε κατάλληλες συναρτήσεις, να τις μελετήσετε ως προς την μονοτονία και με τη βοήθειά τους να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α)  $(2x^2 + 3)^3 - 3(x^2 + x + 5) < (x^2 + x + 5)^3 - 3(2x^2 + 3)$

β)  $e^{x^2} + \ln(x^2 + 2) < e^{\sqrt{x}} + \ln(\sqrt{x} + 2)$

16. α) Να λυθεί η ανίσωση:  $(2x - 1)^2 < \ln\left(\frac{1 + e^{4x}}{1 + e^{4x^2}}\right) + 1$

β) Αν γνωρίζετε ότι η  $f$  είναι γνήσια μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ώστε να ισχύει η σχέση:  $f(x^2 + 1) + f(e^x) > f(2x) + f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. α. Αν  $g(x_1) = g(x_2)$  τότε  $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow 3x_1 - 4 = 3x_2 - 4 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

β. Για τυχαίο  $y_0 \in \mathbb{R}$ , θέτω  $x_0 = \frac{y_0 + 4}{3}$ , άρα  $f(g(\frac{y_0 + 4}{3})) = y_0$ , δηλαδή το  $x_0 = g(\frac{y_0 + 4}{3})$ .

γ.  $g(\ln x) < g(-x + 1) \xrightarrow{f \nearrow} f(g(\ln x)) < f(g(-x + 1)) \Leftrightarrow 3 \ln x - 4 < -3x - 1 \Leftrightarrow$

$3 \ln x + 3x - 3 < 0$ . Θέτω  $h(x) = 3 \ln x + 3x - 3$ ,  $h(x)$  γν. αύξουσα, άρα  $h(x) < h(1) \Leftrightarrow x < 1$  και τελικά  $x \in (0, 1)$ .

2.

α. Έστω  $f(x_1) = f(x_2)$ , άρα  $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \dots x_1 = x_2$ , για  $x = 3$ ,  $f(f(3)) = f(3)$  άρα  $f(3) = 3$ .

β. Έστω  $f$  γν. φθίνουσα και  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(f(x_1)) - f(x_1) < f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow \dots x_1 > x_2$ , άτοπο.

γ.  $f(6 - f(|x - 2| - 1)) = 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(|x - 2| - 1) = f(3) \Leftrightarrow |x - 2| = 4 \Leftrightarrow x = 6$  ή  $x = -2$

δ. Θέτω στην αρχική όπου  $f(x)$  το  $f^{-1}(x)$

3. α. Είναι  $f(f(0)) = 80 \Leftrightarrow f(4) = 80 \Leftrightarrow 64 + 4a + 4 = 80 \Leftrightarrow a = 3$

β. Βρίσκουμε ότι  $f$  γν. αύξουσα και τέμνει τους άξονες στα  $A(-1,0)$ ,  $B(0,4)$ .

γ.  $f(f(9-x^2)+x-2) - f(x+2) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(9-x^2) = 4 = f(0) \Leftrightarrow x = \pm 3$

δ.  $f(f(|x|-1)-18) < f^{-1}(80) \xleftarrow{(f \circ f)(0)=80} f(f(|x|-1)-18) < f(0) \Leftrightarrow$

$f(|x|-1)-18 < 0 \Leftrightarrow f(|x|-1) < 18 = f(2) \Leftrightarrow |x|-1 < 2 \Leftrightarrow x \in (-3,3)$

4. α. Είναι  $e^x + \frac{1-e^x}{e^x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 2e^x \geq 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \geq 0$  που ισχύει. Δηλαδή

η τιμή 1 είναι η ελάχιστη της  $f$  και προκύπτει για  $x = 0$ .

β. Επειδή η  $\sin x$  είναι γν. φθίνουσα στο  $[0, \pi]$ , η  $g(x)$  είναι γν. φθίνουσα και  $5\sin x - 4 = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ , για  $x \in [0, \pi]$ .

γ.  $\frac{e^x + e^{-x} + 3}{5} = \sin x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$ , αφού  $g(x) \leq 1 \leq f(x)$ .

δ. Ζητώ  $|x|-1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ , αφού η εξίσωση είναι ισοδύναμη με  $f(|x|-1) = 1$

5. α. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:  $g(x) = e^x + 2x - 1$ ,  $h(x) = \ln x + 3x - 3$ . Είναι  $g(f(1)) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$  και  $h(f(2)) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 1$  γιατί οι  $g(x), h(x)$  γνήσια αυξ.

β. Η  $f(x)$  είναι γν. αύξουσα.

γ.  $f(\ln x + x) < 0 \Leftrightarrow f(\ln x + x) < f(1) \Leftrightarrow \ln x + x - 1 < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in (0,1)$

6. α.  $g(x) = (\sqrt{x} - 2)^2$ , και για το πεδίο ορισμού της  $g \circ g$ , ζητώ:

$0 \leq (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq |\sqrt{x} - 2| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 16$ , άρα  $x \in [0, 16]$ .

$(g \circ g)(x) = (\sqrt{(\sqrt{x} - 2)^2} - 2)^2 = (|\sqrt{x} - 2| - 2)^2 = (-\sqrt{x} + 2 - 2)^2 = x$

β.  $(g \circ f)(x) = 2x - 1 \xleftarrow{g^{-1}(x)} f(x) = g^{-1}(2x - 1) = 2x - 1 - 4\sqrt{2x - 1} + 4$

$f(x) = 2x + 3 - 4\sqrt{2x - 1}$ ,  $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

γ. Μόνο αν  $x \in [0, 4]$

7. α) Για κάθε  $y_0$  από το  $\mathbb{R}$ , υπάρχει  $x_0 = f(y_0) + 2$ , ώστε  $f(x_0) = y_0$ . β) Θέτω όπου  $x$  το  $f^{-1}(x)$  στην αρχική

σχέση. γ) Λύνω την  $f(x) = x$ . Θέτω στην αρχική όπου  $x$  το  $f(x)$  και τελικά:  $x - 2 = x$ , αδύνατη.

δ) Αρκεί να δείξω ότι  $f(x) < x$ ,  $f(f(x)) < f(x)$ ,  $x - 2 < f(x) < x$  δηλαδή  $-2 < 0$ , το οποίο ισχύει.

8. Γράφουμε την  $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ , οπότε έχει ελάχιστο για  $x = 1$  την τιμή  $-1$ , είναι γνήσια αύξουσα στο

πεδίο ορισμού της, η αντίστροφη της είναι η  $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} + 1$  και η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$f^{-1}(x) = f(x) \xleftarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} f(x) = x \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3$ , δεκτή η  $x = 3$ .

9. α) Η αντίστροφη της είναι δίκλαδη!  $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x-6}, & x < -6 \\ \sqrt[3]{x+6}, & x \geq -6 \end{cases}$

β) Η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα και η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$f^{-1}(x) = f(x) \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 6 = x \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

γ)  $x \in (-12, 12)$

10. α) Είναι  $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ ,  $A_{f^{-1}} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

β) Δεν τέμνει τον γγ', τέμνει τον χχ' στο (-1,0).

γ) Συνθέτουμε από αριστερά με την f, οπότε έχουμε:

$$\frac{6-2e}{e-2} + f(\ln x) = \frac{e}{e-2} \Leftrightarrow f(\ln x) = 3 \Leftrightarrow \ln x = f^{-1}(3) \Leftrightarrow \ln x = \ln 3 \Leftrightarrow x = 3$$

11. α) Είναι  $f^{-1}(x) = f(x)$

β)  $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \ln x < -1 \text{ ή } \ln x > 2 \text{ και } \ln x \neq 3 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e^2, e^3) \cup (e^3, +\infty)$

γ)  $g(x) = f(x+2) \Leftrightarrow g(x) = 3 + \frac{4}{x}$ ,  $A = \mathbb{R}^*$

12. α) Είναι γνήσια φθίνουσα με μοναδική ρίζα την τιμή  $x=1$ .

β) Είναι  $f^{-1}(-e) = 2$ ,  $f^{-1}$  γνήσια φθίνουσα.

γ)  $x = f(x+1) \Leftrightarrow x = \frac{2}{x+1} - e^x - 1$ . Θέτω  $g(x) = \frac{2}{x+1} - e^x - 1 - x$ , g γν. φθιν., μόνη ρίζα  $x=0$ .

δ) Η σχέση γίνεται:  $f(\sqrt{1+3x^2}+1) = f(\sqrt{x^2+4}+1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

13. α) Είναι γνήσια αύξουσα και είναι  $f(2)=0$ ,  $f^{-1}(0)=2$ .

β)  $x=1-2e/e$  γ)  $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

δ)  $1 + f^{-1}(x-2) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x-2) = 1 \Leftrightarrow x-2 = \frac{1}{e} - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

ε)  $f(x^2) = f(|x|) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 1$ .

14. α)  $A_{f \circ g} = \mathbb{R} \neq A_{g \circ f} = (-1, 1)$ , άρα  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in (-1, 1)$ .

β)  $h(x) = \ln x$ ,  $A_h = \left(\frac{1}{e}, e\right)$ ,  $x=e$

γ) Είναι  $t(x) = (f^{-1} \circ g \circ f)(\ln x) = f^{-1}(\ln x) = \dots = \frac{1-x}{1+x}$  με  $A_t = \left(\frac{1}{e}, e\right)$

15. α)  $f(x) = x^3 + 3x$ , f γν. αυξ.,  $f(2x^2+3) < f(x^2+x+5) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$ .

β)  $f(x) = e^x + \ln(x+2)$ , f γν. αυξ.,  $f(x^2) < f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in (0, 1)$ .

16. α)  $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$ ,  $f$  γν. αυξ.,  $f(4x^2) < f(4x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in (0,1)$ .

β) Επειδή  $x^2 + 1 \geq 2x$  και  $e^x > x$ , πρέπει η  $f$  να είναι γνήσια αύξουσα.