ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R, για τις οποίες ισχύει η σχέση:
$f(g(x)) = 3x - 4, \ \text{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}.$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

β. Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών όλο το R.

γ. Αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, να λύσετε την ανίσωση: $g(\ln x) < g(-x+1)$

δ. Αν η g(x) έχει σύνολο τιμών το R, να αποδείξετε ότι και η f είναι 1-1. (Μη θεωρήσετε δεδομένη τη μονοτονία της f από το γ ερώτημα).

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $(f \circ f)(x) = f(x) + 3 - x, \ x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το f(3).

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι γνήσια φθίνουσα.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(6 - f(|x-2|-1)) = 3$

δ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f^{-1}(x) = x + 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^3 + ax + 4$, όπου η γραφική παράσταση της $f \circ f$ τέμνει τον yy΄ στο σημείο με τεταγμένη 80.

α. Να αποδείξετε ότι α=3.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(9 - x^2) + x - 2) - f(x+2) = 0$

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(|x|-1) - 18) < f^{-1}(80)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = e^x + \dfrac{1-e^x}{e^x}, \ x \in \mathbb{R} \ \text{και} \ g(x) = 5\sigma\upsilon\nu x - 4, \ x \in [0, \pi]$

α. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει ελάχιστη τιμή το 1.

β. Να βρείτε τη μονοτονία της g(x) και να λύσετε την εξίσωση g(x)=1.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{e^x + e^{-x} + 3}{5} = \sigma\upsilon\nu x$

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{|x|-1} + e^{1-|x|} = 2$

5. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:
$e^{f(1)} + 2f(1) - 1 = 0 \ \text{και} \ \ln(f(2)) + 3f(2) - 3 = 0.$

α. Να υπολογίσετε τα f(1) και f(2).

β. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f(x).

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x + x) < 0$

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x) = x - 4\sqrt{x} + 4, \ x \in [0, 4]$

α. Να βρείτε την $(g \circ g)(x)$.

β. Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $(g \circ f)(x) = 2x - 1$

γ. Αν για μια συνάρτηση h(x) ισχύει ότι $(g \circ h)(x) = x$, μπορούμε να πούμε ότι h(x)=g(x);

7. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R, για την οποία γνωρίζουμε ότι: $(f\circ f)(x)=x-2,\quad x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και έχει σύνολο τιμών το R.

β) Να αποδείξετε ότι : $f^{-1}(x)=f(x)+2$

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία y=x.

δ) Αν η f είναι γνήσια αύξουσα, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία y=x.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ \ x\in[1,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Έχει ακρότατο;

β) Να βρείτε την f^{-1} και να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-2x-\sqrt{x+1}=1$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x^3-\sqrt[3]{x+6}=6,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) να λύσετε την ανίσωση: $f(|x|-15)<-33$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-2},\ \ x\in\mathbb{R}-\{2\}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα σημεία τομής της f^{-1} με τους άξονες.

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}\left(\dfrac{6-2e}{e-2}+f(\ln x)\right)=1$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-3},\ x\in\mathbb{R}-\{3\}$

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(f\circ f)^2(\ln x)-(f\circ f)(\ln x)-2<0$

γ) Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε: $f(g(x))=x+2$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2}{x}-e^{x-1}-1,\ x\in(0,+\infty)$

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f και να λύσετε την εξίσωση f(x)=0.

β) Να βρείτε το $f^{-1}(-e)$, καθώς και τη μονοτονία της f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x)=x+1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-\sqrt{x^2+4}}{\left(1+\sqrt{1+3x^2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x^2+4}\right)}=\dfrac{e^{\sqrt{x^2+4}}-e^{\sqrt{1+3x^2}}}{2}$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^{x-2}-3,\ \ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το $f^{-1}(0)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=1$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(\ln 2x)<2$

δ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(1+f^{-1}(x-2))=0$

ε) Να λυθεί η εξίσωση: $|x|-x^2=e^{x^2-2}-e^{|x|}-2$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $g(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$

α) Να ελέγξετε αν $(f\circ g)(x)=\left(g\circ f\right)(x)$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=\left(g\circ f\right)\left(\ln x\right)$ στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $h(\ln x)+h(x)-1=0$.

γ) Να βρείτε συνάρτηση t(x) τέτοια ώστε: $f\left(t(x)\right)=g(f(\ln x)$

15. Να επινοήσετε κατάλληλες συναρτήσεις, να τις μελετήσετε ως προς την μονοτονία και με τη βοήθειά τους να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\left(2x^2+3\right)^3-3\left(x^2+x+5\right)<\left(x^2+x+5\right)^3-3\left(2x^2+3\right)$

β) $e^{x^2}+\ln\left(x^2+2\right)<e^{\sqrt{x}}+\ln\left(\sqrt{x}+2\right)$

16. α) Να λυθεί η ανίσωση: $\left(2x-1\right)^2<\ln\left(\frac{1+e^{4x}}{1+e^{4x^2}}\right)+1$

β) Αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ώστε να ισχύει η σχέση : $f(x^2+1)+f(e^x)>f(2x)+f(x)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. *α. Αν* $g(x_1)=g(x_2)$ *τότε* $f(g(x_1))=f(g(x_2))\Leftrightarrow 3x_1-4=3x_2-4\Leftrightarrow x_1=x_2$

β. Για τυχαίο $y_o\in\mathbb{R}$, *θέτω* $x_o=\frac{y_o+4}{3}$, *άρα* $f(g(\frac{y_o+4}{3}))=y_o$, *δηλαδή το* $x_o=g(\frac{y_o+4}{3})$.

γ. $g(\ln x)<g(-x+1)\xleftrightarrow{f\nearrow}f(g(\ln x))<f(g(-x+1))\Leftrightarrow 3\ln x-4<-3x-1\Leftrightarrow$
$3\ln x+3x-3<0$. *Θέτω* $h(x)=3\ln x+3x-3$, $h(x)$ *γν. αύξουσα, άρα* $h(x)<h(1)\Leftrightarrow x<1$ *και τελικά* $x\in(0,1)$.

2.

α. Έστω $f(x_1)=f(x_2)$, *άρα* $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ ... $x_1=x_2$, *για* $x=3$, $f(f(3))=f(3)$ *άρα* $f(3)=3$.

β. Έστω f γν. φθίνουσα και $x_1<x_2\Leftrightarrow....\Leftrightarrow f(f(x_1))-f(x_1)<f(f(x_2))-f(x_2)\Leftrightarrow$
$....x_1>x_2$, *άτοπο.*

γ. $f(6-f(|x-2|-1))=3\Leftrightarrow...\Leftrightarrow f(|x-2|-1)=f(3)\Leftrightarrow|x-2|=4\Leftrightarrow x=6$ *ή* $x=-2$

δ. Θέτω στην αρχική όπου $f(x)$ *το* $f^{-1}(x)$

3. α. Είναι $f(f(0))=80 \Leftrightarrow f(4)=80 \Leftrightarrow 64+4a+4=80 \Leftrightarrow a=3$

β. Βρίσκουμε ότι f γν. αύξουσα και τέμνει τους άξονες στα $A(-1,0)$, $B(0,4)$.

γ. $f(f(9-x^2)+x-2)-f(x+2)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(9-x^2)=4=f(0) \Leftrightarrow x=\pm 3$

δ. $f(f(|x|-1)-18)<f^{-1}(80) \xleftrightarrow{(f\circ f)(0)=80} f(f(|x|-1)-18)<f(0) \Leftrightarrow$

$f(|x|-1)-18<0 \Leftrightarrow f(|x|-1)<18=f(2) \Leftrightarrow |x|-1<2 \Leftrightarrow x\in(-3,3)$

4. α. Είναι $e^x+\dfrac{1-e^x}{e^x}\geq 1 \Leftrightarrow e^{2x}+1-2e^x\geq 0 \Leftrightarrow \left(e^x-1\right)^2\geq 0$ που ισχύει. Δηλαδή η τιμή 1 είναι η ελάχιστη της f και προκύπτει για $x=0$.

β. Επειδή η συνχ είναι γν. φθίνουσα στο $[0,\pi]$, η $g(x)$ είναι γν. φθίνουσα και $5\sigma\upsilon\nu x-4=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=0$, για $x\in[0,\pi]$.

γ. $\dfrac{e^x+e^{-x}+3}{5}=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=0$, αφού $g(x)\leq 1\leq f(x)$.

δ. Ζητώ $|x|-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, αφού η εξίσωση είναι ισοδύναμη με $f(|x|-1)=1$

5. α. Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $g(x)=e^x+2x-1$, $h(x)=\ln x+3x-3$. Είναι $g(f(1))=0 \Leftrightarrow f(1)=0$ και $h(f(2))=0 \Leftrightarrow f(2)=1$ γιατί οι $g(x),h(x)$ γνήσια αυξ.

β. Η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα.

γ. $f(\ln x+x)<0 \Leftrightarrow f(\ln x+x)<f(1) \Leftrightarrow \ln x+x-1<0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x\in(0,1)$

6. α. $g(x)=(\sqrt{x}-2)^2$, και για το πεδίο ορισμού της $g\circ g$, ζητώ:

$0\leq(\sqrt{x}-2)^2\leq 4 \Leftrightarrow 0\leq|\sqrt{x}-2|\leq 2 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 16$, άρα $x\in[0,4]$.

$(g\circ g)(x)=(\sqrt{(\sqrt{x}-2)^2}-2)^2=\left(|\sqrt{x}-2|-2\right)^2=\left(-\sqrt{x}+2-2\right)^2=x$

β. $(g\circ f)(x)=2x-1 \xleftrightarrow{g^{-1}(x)} f(x)=g^{-1}(2x-1)=2x-1-4\sqrt{2x-1}+4$

$f(x)=2x+3-4\sqrt{2x-1}$, $x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right]$

γ. Μόνο αν $x\in[0,4]$

7. *α) Για κάθε yο από το R, υπάρχει xο=f(yο)+2, ώστε f(xο)=yο. β) Θέτω όπου χ το $f^{-1}(x)$ στην αρχική σχέση. γ) Λύνω την f(x)=x. θέτω στην αρχική όπου x το f(x) και τελικά: χ-2=χ, αδύνατη.*
δ) Αρκεί να δείξω ότι f(x)<x, f(f(x))<f(x), x-2<f(x)<x δηλαδή -2<0 , το οποίο ισχύει.

8. *Γράφουμε την* $f(x)=\left(x-1\right)^2-1$ *, οπότε έχει ελάχιστο για x=1 την τιμή -1, είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της , η αντίστροφή της είναι η* $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+1$ *και η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την*

$f^{-1}(x)=f(x) \xleftrightarrow{f\ \gamma\nu.\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} f(x)=x \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2-1=x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$, δεκτή η $x=3$.

9. α) Η αντίστροφή της είναι δίκλαδη! $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x-6}, & x<-6\\ \sqrt[3]{x+6}, & x\geq -6\end{cases}$

β) Η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα και η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$f^{-1}(x)=f(x)\xleftrightarrow{f\ \gamma\nu.\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} f(x)=x \Leftrightarrow x^3-6=x \Leftrightarrow x^3-x-6=0 \Leftrightarrow x=2.$

γ) $x\in(-12,12)$

10. α) Είναι $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right),\ A_{f^{-1}}=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

β) Δεν τέμνει τον yy΄ , τέμνει τον xx΄ στο (-1,0).

γ) Συνθέτουμε από αριστερά με την f , οπότε έχουμε:

$$\frac{6-2e}{e-2}+f(\ln x)=\frac{e}{e-2}\Leftrightarrow f(\ln x)=3\Leftrightarrow \ln x=f^{-1}(3)\Leftrightarrow \ln x=\ln 3\Leftrightarrow x=3$$

11. α) Είναι $f^{-1}(x)=f(x)$

β) $\ln^2 x-\ln x-2<0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \ln x<-1$ ή $\ln x>2$ $\kappa\alpha\iota$ $\ln x\neq 3\Leftrightarrow x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup(e^2,e^3)\cup(e^3,+\infty)$

γ) $g(x)=f(x+2)\Leftrightarrow g(x)=3+\dfrac{4}{x},\ A=\mathbb{R}^*$

12. α) Είναι γνήσια φθίνουσα με μοναδική ρίζα την τιμή x=1.

β) Είναι $f^{-1}(-e)=2,\ f^{-1}$ $\gamma\nu\acute{\eta}\sigma\iota\alpha\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha.$

γ) $x=f(x+1)\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{x+1}-e^x-1.$ $\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega$ $g(x)=\dfrac{2}{x+1}-e^x-1-x,\ g$ $\gamma\nu.\ \varphi\theta\iota\nu.,\ \mu\acute{o}\nu\eta\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha\ x=0.$

δ) Η $\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota$: $f(\sqrt{1+3x^2}+1)=f\left(\sqrt{x^2+4}+1\right)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x^2=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

13. α) Είναι γνήσια αύξουσα και είναι f(2)=0, $f^{-1}(0)=2$.

β) x=1-2e/e   γ) $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

δ) $1+f^{-1}(x-2)=2\Leftrightarrow f^{-1}(x-2)=1\Leftrightarrow x-2=\dfrac{1}{e}-2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

ε) $f(x^2)=f(|x|)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=0,\ x=-1,\ x=1.$

14. α) $A_{f\circ g}=\mathbb{R}\neq A_{g\circ f}=(-1,1),$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x\ \ \forall x\in(-1,1).$

β) $h(x)=\ln x,\ A_h=\left(\dfrac{1}{e},e\right)$, x=e

γ) Είναι $t(x)=(f^{-1}\circ g\circ f)(\ln x)=f^{-1}(\ln x)=...=\dfrac{1-x}{1+x}$ $\mu\varepsilon$ $A_t=\left(\dfrac{1}{e},e\right)$

15. α) $f(x)=x^3+3x,\ f$ $\gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi.,\ f(2x^2+3)<f(x^2+x+5)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x\in(-1,2).$

β) $f(x)=e^x+\ln(x+2),\ f$ $\gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi.,\ f(x^2)<f(\sqrt{x})\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x\in(0,1).$

16. α) $f(x) = x + \ln(1+e^x)$, f $\gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi.$, $f(4x^2) < f(4x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x \in (0,1)$.

β) Επειδή $x^2 + 1 \geq 2x$ *και* $e^x > x$, *πρέπει η* f *να είναι γνήσια αύξουσα.*