

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Α. Άλγεβρα

1. Τι ονομάζεται ακέραια αλγεβρική παράσταση και τι είναι μονώνυμο; Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα;
 $\frac{2}{3x}, \frac{3x^2a}{5}, 5, 2x+3, 5(x^2-a)$ (σελ. 26)
2. Τι είναι βαθμός μονωνύμου; Ποια μονώνυμα χαρακτηρίζονται σταθερά και ποιο μηδενικό μονώνυμο; (σελ. 26)
3. Πως ορίζεται η πρόσθεση και πως ο πολλαπλασιασμός μονωνύμων; (σελ.30)
4. Εξηγήστε τους παρακάτω όρους: Πολυώνυμο, Βαθμός πολυωνύμου, Σταθερό πολυώνυμο, Μηδενικό πολυώνυμο. (σελ. 33)
5. Να αποδείξετε ότι: $(a + \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. Σε ποια περίπτωση ισχύει η σχέση: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$; (σελ. 43)
6. Αποδείξτε ότι: $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ και $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, πως γίνεται η πρώτη ταυτότητα; (σελ. 44)
7. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$. Αν $\alpha \neq \beta$ και $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της παράστασης $K = \alpha^3 \cdot \beta^3$; (σελ.44)
8. Να συμπληρώσετε τα συμπεράσματα:
i. Αν $\alpha\beta = 0$ τότε: ii. Αν $\alpha\beta \neq 0$ τότε: iii. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε:
9. Πως ορίζεται το Ε.Κ.Π και πως ο Μ.Κ.Δ δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων; (σελ. 68)
10. Τι ονομάζουμε διακρίνουσα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης; Πως συνδέεται η τιμή της διακρίνουσας με το πλήθος των ριζών της; (σελ. 94)
11. Ποιες πράξεις έχουμε δικαίωμα να κάνουμε στα δύο μέλη μιας ανίσωσης; Ποιες πράξεις έχουμε δικαίωμα να κάνουμε μεταξύ δύο ανισώσεων; (σελ. 112)
12. Πότε δύο σύνολα είναι ίσα; Πότε λέμε ότι ένα σύνολο A είναι υποσύνολο ενός συνόλου B ; (σελ.161)
13. Τι ονομάζουμε ένωση δύο συνόλων; Να παραστήσετε με τη βοήθεια διαγράμματος την ένωση δύο συνόλων. (σελ.162)
14. Τι ονομάζουμε τομή δύο συνόλων; Να παραστήσετε με τη βοήθεια διαγράμματος την τομή δύο συνόλων. (σελ.162)
15. Τι ονομάζουμε συμπλήρωμα ενός συνόλου; Να παραστήσετε με τη βοήθεια διαγράμματος το συμπλήρωμα ενός συνόλου (σελ.162)
16. Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης; Να δώσετε ένα παράδειγμα. (σελ. 168)
17. Τι ονομάζουμε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης; Να εξηγήσετε τους όρους: αδύνατο, βέβαιο ενδεχόμενο και ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. (σελ. 169)

Β. Γεωμετρία

1. Τι ονομάζουμε διάμεσο, τι διχοτόμο και τι ύψος ενός τριγώνου; (σελ. 187)
2. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. (σελ. 188,189)
3. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. (σελ. 190)

4. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος; (σελ. 192)
5. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας; (σελ.192)
6. Να αποδείξετε ότι αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιοδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει. (σελ. 198)
7. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου, φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του. (σελ. 199)
8. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; Πότε δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια; (σελ. 216,217)
9. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια; Πως συνδέονται οι πλευρές τους αν είναι όμοια τα τρίγωνα; (σελ. 220)
10. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων; Εξηγήστε. (σελ. 226)
11. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω , σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων; (σελ. 233)
12. Πως συνδέονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών; (σελ. 237)
13. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. (σελ.240)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΘΕΜΑΤΑ

A. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (2x - 1)^2 - (x + 3)^2$ και $B = (-1 - 2x)^2 - (x + 1)^2$

A1. Να αποδείξετε ότι: $A = (3x + 2)(x - 4)$ και $B = x(3x + 2)$

A2. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A+B$

A3. Να λύσετε την εξίσωση $A+B=0$.

B. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x + y - 3)(x - y + 3) + (y - 2)^2 - (x - 1)^2 \text{ και } B = (x - 1)^3 + (y + 2)^3 - x^2(x - 3) - y^2(y + 6)$$

B1. Να αποδείξετε ότι: $A = 2(x + y - 3)$ και $B = 3x + 12y + 7$

B2. Αν $A=-4$ και $B=1$, να βρείτε τις τιμές των x, y .

Γ. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (2x - 1)(x + 2)(x + 3)$ και $B = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $A + B = 3x^3 + 9x^2$

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $A + B = 12x$

Δ. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (x - y)(x + 2)(x + 3)$ και $B = (x + y)(x - 3)(x - 2)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $A + B + 10xy = 2x^3 + 12x$

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση: $A + B + 10xy = 14x$

Ε. Ε1. Να αποδείξετε ότι: $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

Ε2. Να αποδείξετε ότι: $K = \left(a + \frac{1}{a} - 1\right)(a + 1) + \left(a + \frac{1}{a} + 1\right)(a - 1) = 2a^2, a \neq 0$

Ε3. Να λύσετε την εξίσωση: $K = 8a - 10$

ΣΤ. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = x^3 - x$, $B = 2x^3 - 2x^2$, $C = x^3 + 2x^2 + x$

ΣΤ1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A , B και C .

ΣΤ2. Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των τριών παραστάσεων.

ΣΤ3. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{A+B}{C-A}$, για $x \neq 0$ και $x \neq -1$.

Ζ. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = x^3 + x^2 - x - 1$, $B = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Z1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A και B .

Z2. Να παραγοντοποιήσετε το άθροισμα $A+B$.

Z3. Να λύσετε την εξίσωση $A+B=0$

Η. Αν ισχύει ότι $x^2 + y^2 = 8xy$, όπου $x \neq 0$ και $y \neq 0$, βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ και } B = (x-y) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

Θ. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\Theta 1. \frac{\psi}{\chi} - \frac{\chi+\psi}{\chi-\psi} + \frac{\psi^2}{\chi^2 - \chi\psi} - \frac{\chi(\chi+\psi)}{2\psi(\psi-\chi)}$$

$$\Theta 2. \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} + \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta}$$

Ι. Ι1. Να βρείτε αριθμό ώστε το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι 3 μονάδες μικρότερο από το πενταπλάσιό του.

Ι2. Να βρείτε αριθμό που αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του μειωμένο κατά 3 μονάδες, δίνει αποτέλεσμα -2.

ΙΑ. ΙΑ1. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου με περίμετρο 32m και εμβαδόν 60m². Να βρείτε τις διαστάσεις του.

ΙΑ2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με $(-1-2x)$, έχει τις κάθετες πλευρές του ίσες με $(2x+9)$ και $(1-x)$ αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος των πλευρών του.

ΙΑ3. Να βρείτε το μεγαλύτερο τετράγωνο που μπορούμε να κατασκευάσουμε με πλευρά x , αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του ισούται με $2x^2 - 5x + 4$.

ΙΒ. Αν ισχύουν οι σχέσεις $-2 < x < 3$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παρακάτω παραστάσεις:

$$IB1. 2x - 3y \quad IB2. (x+3)y \quad IB3. y^2 - x + 5$$

ΙΓ. Αν ισχύουν οι σχέσεις: $x > 2$ και $y > 3$ να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων:

$$i. (x-2)(3-y) \quad ii. 2x - x^2 \quad iii. xy(x-1)(y-2)$$

ΙΔ. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις ή συστήματα εξισώσεων με αγνώστους τους x και y .

$$ID1. (2x - 3y + 1)^2 + (x + 2y - 3)^2 = 0$$

$$\text{I}\Delta 2. \frac{5x+y}{3} - \frac{x+2y}{2} = x-y$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y+2}{3} = 0$$

$$\text{I}\Delta 3. \frac{2}{x} - \frac{3}{2y} = -7$$

$$\frac{4}{x} + \frac{2}{3y} = 8$$

ΙΕ. Δίνεται η εξίσωση $6x^2 + x - 1 = 0$ καθώς και οι αμβλείες γωνίες ω και φ .

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι τα $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\upsilon\varphi$.

ΙΕ1. Να βρείτε τα $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\upsilon\varphi$.

ΙΕ2. Να βρείτε τη γωνία φ καθώς και τα $\eta\mu\varphi$, $\sigma\upsilon\upsilon\omega$.

ΙΕ3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = 3\sqrt{8}\sigma\upsilon\upsilon(180 - \omega) + 4\sqrt{3}\eta\mu(180 - \varphi) - \sqrt{8}\varepsilon\varphi(180 - \omega)$$

ΙΣΤ. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \sigma\upsilon\upsilon^2 113^\circ + \eta\mu^2 44^\circ + \eta\mu^2 67^\circ + \sigma\upsilon\upsilon^2 136^\circ \quad \text{και} \quad B = \frac{\varepsilon\varphi 110^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ} - \frac{\eta\mu 40^\circ}{\eta\mu 140^\circ}$$

ΙΣΤ1. Να αποδείξετε ότι $A+B=0$.

ΙΣΤ2. Για τις τιμές των A και B που βρήκατε παραπάνω, να λύσετε την εξίσωση:

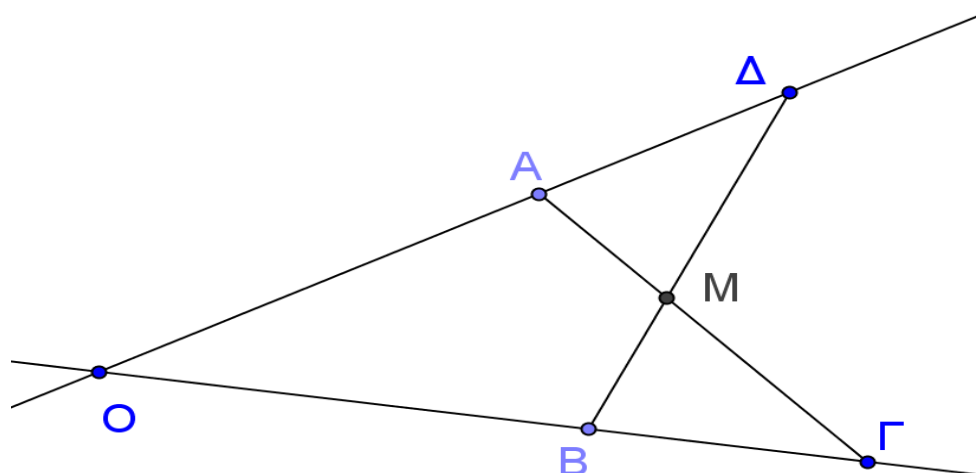
$(A+1)x^2 + Bx - 1 = 0$. Αν η μία από τις ρίζες της είναι το συνημίτονο μιας αμβλείας γωνίας ω , να βρείτε το ημίτονο της γωνίας ω .

ΙΖ. Στο σχήμα που βλέπετε, γνωρίζουμε ότι $OA=OB$ και $OF=OD$.

ΙΖ1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAG και $OB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε όλα τα στοιχεία τους που είναι τελικά ίσα.

ΙΖ2. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MA\Delta$ και $MB\Gamma$ είναι ίσα και να γράψετε και όλα τα στοιχεία τους που είναι τελικά ίσα.

ΙΖ3. Να αποδείξετε ότι η OM είναι διχοτόμος της γωνίας AOB .

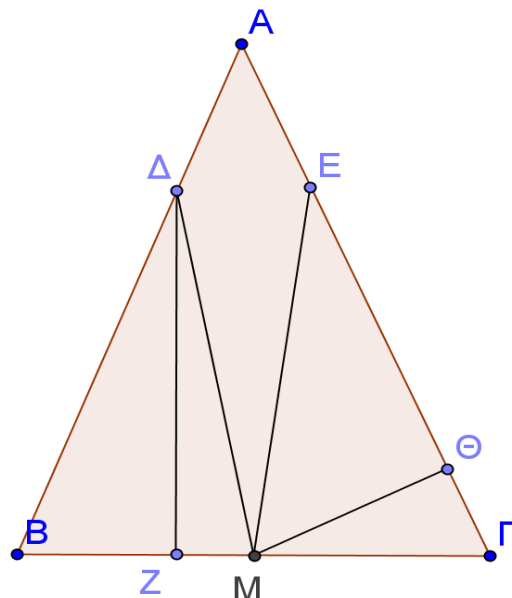


ΙΗ. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), ονομάζουμε M το μέσον της βάσης $B\Gamma$ και παίρνουμε δύο σημεία Δ και E πάνω στις AB , AG αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$.

ΙΗ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔME είναι ισοσκελές.

ΙΗ2. Φέρνουμε τα ΔZ και $M\Theta$ κάθετα στις πλευρές $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta Z$ και $M\Gamma\Theta$ είναι όμοια και να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών τους.

ΙΗ3. Αν $B\Gamma=8\text{cm}$, $ZM=1\text{cm}$ και $\Theta\Gamma=2\text{cm}$ να βρείτε το μήκος του τμήματος ΔB .



ΙΘ. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=4\text{cm}$, $AG=5\text{cm}$ και $B\Gamma=6\text{cm}$ και ονομάζουμε Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$. Στη συνέχεια φέρνουμε τμήμα EZ παράλληλο της AB (το Z σημείο πάνω στην AG).

ΙΘ1. Να βρείτε το μήκος ΔE καθώς και το μήκος EZ δικαιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

ΙΘ2. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

ΙΘ3. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των δύο τριγώνων.

Κ. Δίνεται η παράσταση $A = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$

Κ1. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A και να λύσετε την εξίσωση $A=0$.

Κ2. Αν η μεγαλύτερη από τις ρίζες της εξίσωσης ισούται με το ημίτονο μιας αμβλείας γωνίας ω , να βρείτε τη γωνία ω .

Κ3. Μια από τις ρίζες της εξίσωσης $A=0$ ισούται με το συνημίτονο μιας αμβλείας γωνίας φ . Να βρείτε το ημίτονο της γωνίας φ καθώς και την εφαπτομένη της.

ΚΑ. Γνωρίζουμε ότι για την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας φ ισχύει ότι: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3}$.

ΚΑ1. Να υπολογίσετε τα $\eta\mu\varphi$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi$.

ΚΑ2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - \varphi) - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \varphi)}{\varepsilon\varphi(180^\circ - \varphi)}$

ΚΑ3. Να λύσετε την εξίσωση:

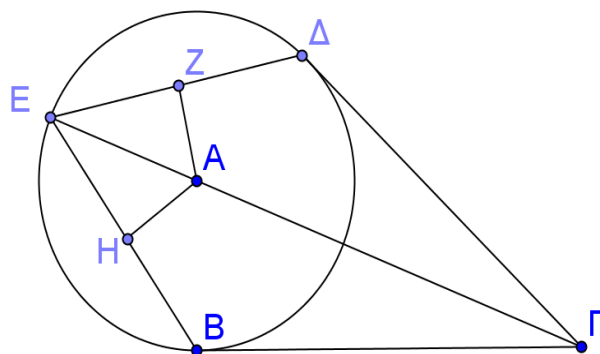
$$\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot x^2 - \eta\mu\varphi \cdot x = -\frac{1}{5}$$

ΚΒ. Στο διπλανό σχήμα, τα κάθετα προς τις χορδές τμήματα AH και AZ είναι ίσα και τα τμήματα $\Gamma\Delta$ και ΓB είναι εφαπτόμενα.

ΚΒ1. Να αποδείξετε ότι $\Delta E=BE$.

ΚΒ2. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=\Gamma B$.

ΚΒ3. Να αποδείξετε ότι ΓE διχοτόμος της γωνίας Γ .



ΚΓ. Να λύσετε και να συναληθεύσετε τα παρακάτω συστήματα ανισώσεων:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } -3 \leq 2 - 3x \leq 5 & \text{b. } \begin{array}{l} -1 < 2x - 3 < 4 \\ 3(1 - 2x) < 4 \end{array} & \text{c. } \begin{array}{l} \frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} \geq 1 \\ 1 - \frac{2-x}{3} \geq -2 \end{array} \end{array}$$

ΚΔ. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{a. } (2x - 3)^2 - (x + 2)^2 = -5(x + 1) \qquad \text{b. } (x - 2)^3 - 2(x + 1) = (x + 1)^3 - 9(x + 4)$$

$$\text{c. } \frac{x^2}{2} - \frac{2(x + 2)}{5} = \frac{7(x - 2)}{10} \qquad \text{d. } \frac{x^2}{3} - \frac{x - 2}{6} = \frac{6x + 1}{4} - 2$$

ΚΕ. 1. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους, τα παρακάτω σύνολα:

$$A = \{x, \text{ όπου } x \text{ λύση της εξίσωσης } x^2 - x - 2 = 0\}$$

$$B = \{x, \text{ όπου } x \text{ λύση της εξίσωσης } x^3 - x = 0\}$$

$$\Gamma = \{x, \text{ όπου } x \text{ ακέραια λύση της ανίσωσης } -3 < 2x - 1 \leq 5\}$$

2. Να βρείτε τα σύνολα:

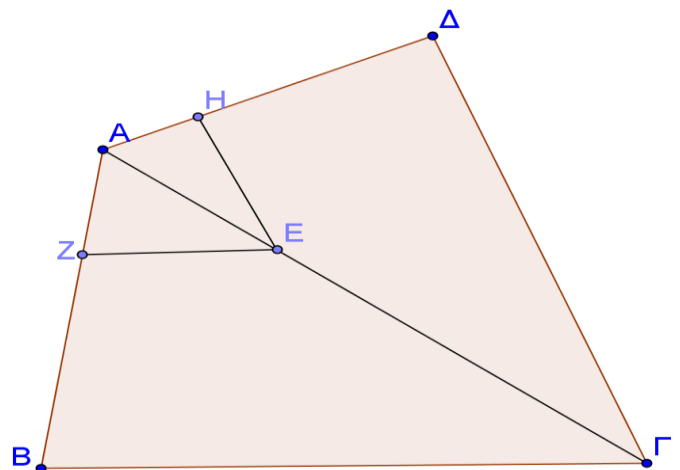
$A \cup B$, $B \cap \Gamma$, $A \cap \Gamma$ και να βρείτε το συμπλήρωμα του A ως προς το Γ .

ΚΣΤ. Στο παρακάτω σχήμα γνωρίζουμε ότι:

$ZE \parallel B\Gamma$, $EH \parallel \Delta\Gamma$, $ZB = x$, $AE = 8$, $E\Gamma = 12$, $AH = y$,
 $H\Delta = 9$, $AB = 18$, $ZE = 6$ και $B\Gamma = z$.

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y .
2. Να δικαιολογήσετε ότι τα τρίγωνα AZE και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το μήκος z .
3. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων AZE και $AB\Gamma$.

ΚΖ. Ένα τετράγωνο πλευράς $2x$ cm, έχει εμβαδόν κατά 32 cm^2 μεγαλύτερο από ένα άλλο τετράγωνο πλευράς $(x-1)$ cm. Να βρείτε τις διαστάσεις των τετραγώνων.



ΚΗ. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = 6 \text{ cm}$ και $AG = 9 \text{ cm}$, παίρνουμε δύο σημεία Δ και E πάνω στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Delta = 2 \text{ cm}$ και $AE = 3 \text{ cm}$.

1. Να δικαιολογήσετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.
2. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει.
2. Αν επιπλέον ισχύει ότι $B\Gamma = 12 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος ΔE .