

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΕΠ2-1718

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και

$$\text{ισχύει } f'(x) = v \cdot x^{v-1} \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

β. Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και

$$\text{ισχύει } f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

A2. Πότε η ευθεία $y = ax + b$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής

παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$; (Μονάδες 2)

A3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle.

(Μονάδες 3)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως «Σωστό» ή «Λάθος».

1. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, τότε η σύνθεση της

συνάρτησης f με τη συνάρτηση g είναι βέβαιο ότι ορίζεται αν

$$f(A) \cap B \neq \emptyset$$

2. Αν για τις συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το \mathbb{R} ισχύει

$$f(x) < g(x) \text{ για κάθε } x \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

3. Για κάθε ακέραιο αριθμό $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\kappa) = +\infty$

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, τότε είναι

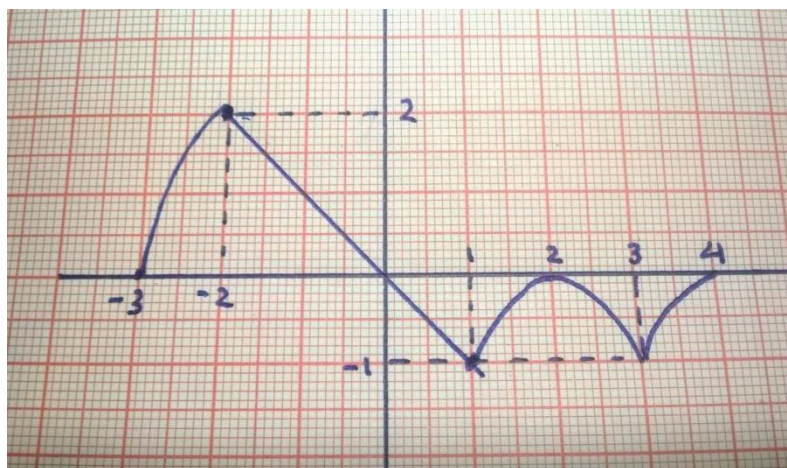
βέβαιο ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ δεν υπάρχει.

5. Αν η f είναι συνεχής μη μηδενική συνάρτηση στο Δ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που ορίζεται στο $[-3, 4]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι $f(0) = 0$.



B1. Να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακρότατων, τη μονοτονία της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι

$$f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [-3, 4]. \quad (6 \text{ μονάδες})$$

B2. Να βρείτε την κυρτότητα της f και τις θέσεις των σημείων καμπής της. (6 μονάδες)

B3. Να βρείτε τον τύπο της f για $x \in [-2, 1]$ και την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της $(1, f(1))$. (7 μονάδες)

B4. Να υπολογίσετε τα όρια: a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) + 1}{x - 1}$ b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - 3h) - f(1 + 2h)}{h}$ (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f(x)$ μια συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) + xf'(x) = e^{-xf(x)}$ και $f(1) = \ln 2$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ (5 μονάδες)

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. (5 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε την τιμή του θ , $\theta \in [0, 2\pi]$, ώστε η εξίσωση $f(x) = \eta\mu\theta + 2$ να έχει λύση στο $[0, +\infty)$ και να βρείτε τη λύση αυτή. (7 μονάδες)

Γ4. Αν η $F(x)$ είναι μια αρχική της f , να λύσετε την ανίσωση:

$$F(\ln^2 x + 2017) - F(\ln^2 x + 2016) < F(\ln x + 2017) - F(\ln x + 2016) \quad (8 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(x^2 + 1) + a$, $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $F(x)$ είναι αρχική της $f(x)$ με $F(0) = 0$ και η εφαπτομένη της F στο $(0, F(0))$ περνάει από το σημείο $A(1, 2)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και να βρείτε -αν υπάρχουν- τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f . (2 και 3 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $|F(x)| \geq 2|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (6 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της F . (5 μονάδες)

Δ4. i. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική της $F(x)$, τους άξονες και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > 0$, έστω $E(\lambda)$. (5 μονάδες)

ii. Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ (4 μονάδες)