

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 1ΓΕΠ-1718

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . **(Μονάδες 10)**

A2. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$; **(Μονάδες 2)**

A3. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού μιας συνάρτησης f . **(Μονάδες 3)**

A4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν ισχύει ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε x πραγματικό, τότε, και με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

β. Αν για μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ισχύει ότι $f'(x)$ είναι γνήσια αύξουσα για κάθε x πραγματικό, τότε είναι και $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό x .

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή από το διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει $\int_a^b f(x) dx < 0$.

δ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει η σχέση:

$$[2f(x_0)]' = 2f'(x_0)$$

ε. Αν μια παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση δεν είναι 1-1, τότε δέχεται μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

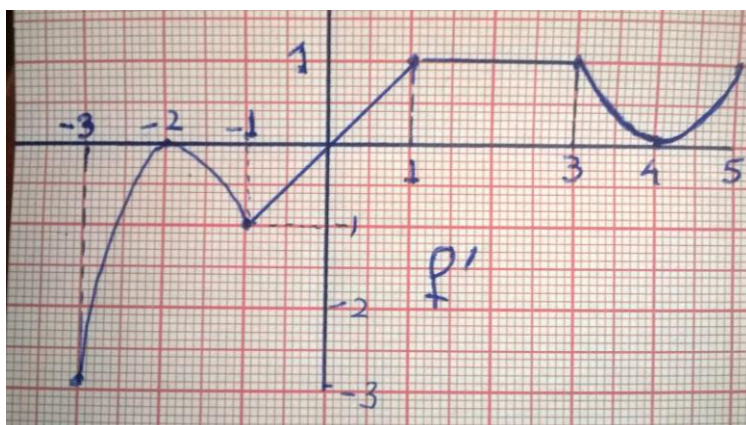
Η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

B1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και τα σημεία στα οποία παρουσιάζει ακρότατα.

(5 μονάδες)

B2. Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f .

(8 μονάδες)



B3. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν και να δικαιολογήσετε όσα ισχυρίζεστε πως δεν υπάρχουν.

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \text{b.} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h^3} \quad \text{c.} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x^2 + x}$$

(6 μονάδες)

B4. Η συνάρτηση f , έχει ασύμπτωτες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(2 μονάδες)

B5. Αν γνωρίζετε ότι $f(-3)=5$, $f(0)=-2$ και $f(5)=7$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ για την οποία ισχύουν: } f(0) = -\ln 2, e^{f(x)} = 1 + f'(x)$$

$$\text{καθώς και η συνάρτηση } h \text{ για την οποία ισχύει: } h(x) = 1 - e^{-f(x)}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $h(x) = -e^x$ και $f(x) = -\ln(1 + e^x)$ (Μονάδες 7)

Γ2. Να ελέγξετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι:

$$x + \ln 4 + 2f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{2} < \ln \frac{e+1}{2} < \frac{e}{e+1}$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x, \quad x \in (0, +\infty) \text{ και } f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}, \quad x \in [1, +\infty).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ έχει μοναδική ρίζα p , $p > 1$. (Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανίσωση: $f(x) \leq \frac{1}{2p^2}$, για κάθε $x \geq 1$, όπου p η

ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος. (Μονάδες 6)

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\ln x}{(1+x)^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$, για κάθε $x \geq 1$ (Μονάδες 2)

ii. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E ανάμεσα στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda > 1$, ισχύει η σχέση:

$$-\frac{\ln \lambda}{1+\lambda} + \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right) + \ln 2 < E < \frac{\lambda - \ln \lambda - 1}{\lambda} \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

iii. Αν υπάρχει το όριο: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha \in (\ln 2, 1)$
(Μονάδες 4)