

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν για μια παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ συνάρτηση f ισχύει πως $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο Δ . **(Μονάδες 10)**

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του. **(Μονάδες 5)**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστές» ή «Λάθος».

i. Μια συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μπορεί να είναι 1-1.

ii. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

iii. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Δ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, είναι σταθερή.

iv. Για μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$, υπάρχει πάντα σημείο ξ στο $[a, \beta]$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

v. Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο (a, β) και γνήσια φθίνουσα στο (β, γ) η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο β . **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ για την οποία επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις: $f''(x) > 0$ και $f'(3) = f(2) + f(3)$.

B1. Να αποδείξετε ότι $f(2) > 0$ **(Μονάδες 7)**

B2. Να δικαιολογήσετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε x στο $[2,3]$. **(Μονάδες 6)**

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (x-2)f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[2,3]$. **(Μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = xe^x - (1 + e^x) \ln(1 + e^x), \quad x \in (0, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Γ1. i. Να ελέγξετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. **(Μονάδες 7)**

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. **(Μονάδες 5)**

iii. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$. **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας ρ , το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Να αποδείξετε ότι $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x < 1$. **(Μονάδες 5)**

ii. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης με τύπο $f(x) = e^x + \ln|x-1|$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ **(Μονάδες 6)**

iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = 2018$ **(Μονάδες 4)**

Δ2. Να λυθεί η εξίσωση: $e^{-x^2+3x-2} = \frac{x^2+2x}{5x-2}$. **(Μονάδες 10)**