ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠ3- 1718

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α: Α3: Λ-Λ-Λ-Λ-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Με Θ.Μ.Τ *για την* f *στο* $[2,3]$, *προκύπτει ότι* $\exists\ \xi \in (2,3)$ *ώστε* $f'(\xi) = f(3) - f(2)$.
Όμως, $\xi < 3 \xleftrightarrow{f'\ \text{γν. αύξουσα}} f'(\xi) < f'(3) \Leftrightarrow f(3) - f(2) < f(2) + f(3) \Leftrightarrow 2f(2) > 0 \Leftrightarrow f(2) > 0$.

Β2. Αφού f *γνήσια αύξουσα στο* $[2,3]$, *το* $f(2)$ *είναι η ελάχιστη τιμή της, συνεπώς* $f(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [2,3]$.

Β3. Έστω $g(x) = f(x) - (x-2)f'(x)$. Με Θ.*Bolzano* , $g(2) = f(2) > 0$,
$g(3) = f(3) - f'(3) = -f(2) < 0$, *συνεπώς υπάρχει* $x_o \in (2,3)$: $f(x_o) = 0$.
Επ*ίσης,* $g'(x) = -(x-2)f''(x) < 0$ *για* $x \in (2,3)$, *άρα η* $g(x)$ *γνήσια φθίνουσα, συνεπώς το* x_o *μοναδική ρίζα της.*

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Είναι $f'(x) = e^x + xe^x - e^x\ln(1+e^x) - e^x = e^x\left(x - \ln(1+e^x)\right) = e^x \cdot \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) < 0$, γιατί :

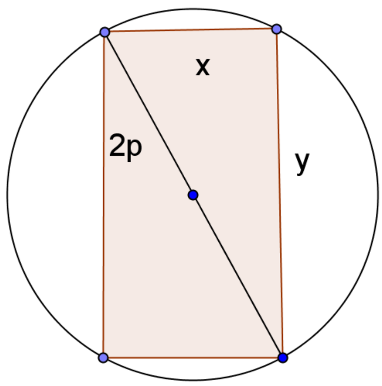
$0 < \dfrac{e^x}{e^x+1} < 1 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, άρα $f(x)$ γνήσια φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Για $x > 0 \xleftrightarrow{f\ \text{γν. φθίνουσα}} f(x) < \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2\ln 2 < 0$.

iii. Είναι $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+e^x)}$, άρα : $g'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+e^x)} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+e^x) + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) \Rightarrow$

$g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}\ln(1+e^x)} \cdot \left(-(1+e^x)\ln(1+e^x) + xe^x\right) = \dfrac{1}{x^2}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}} f(x) < 0$ άρα g γν. φθίνουσα.

Γ2. Με Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζουμε το y ως συνάρτηση του x και στη συνέχεια με Ε(x) το εμβαδόν του σχηματισμένου ορθογωνίου.



$y = \sqrt{4p^2 - x^2}$, $E(x) = x \cdot \sqrt{4p^2 - x^2}$, $x \in (0,2p)$.
Βρίσκουμε το ακρότατο της $E(x)$, δηλαδή:

$$E'(x) = \sqrt{4p^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4p^2 - x^2}} = \frac{4p^2 - 2x^2}{\sqrt{4p^2 - x^2}}.$$

Ο αριθμητής έχει δεκτή τιμή μηδενισμού

$x = p\sqrt{2}$ και η $E(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,p\sqrt{2})$ και γνήσια φθίνουσα στο $[p\sqrt{2},2p)$, άρα παρουσιάζει μέγιστο για $x = p\sqrt{2}$, άρα και για $y = p\sqrt{2}$, συνεπώς το σχήμα με το μέγιστο εμβαδόν είναι το τετράγωνο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Αν $x<1$, $1-x>0$, οπότε η προς απόδειξη ανίσωση γράφεται: $e^{x}(1-x)-1\le 0$. Θέτω $g(x)=e^{x}(1-x)-1$, οπότε η ανίσωση γίνεται: $g(x)\le g(0)$. Όμως, $g'(x)=-xe^{x}$, συνεπώς η $g'(x)$ $\begin{array}{c|cc|c} -\infty & & 0 & 1 \\ & + & - & \end{array}$ άρα έχει μέγιστο για $x=0$, το $g(0)=0$, άρα $g(x)\le g(0)$.

ii. $f'(x)=e^{x}+\dfrac{1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}$. Αν $x<1$, από το (i), $f'(x)<0$, ενώ για $x>1$ είναι προφανώς $f'(x)>0$. Δηλαδή, η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,1)$ και γνήσια αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

iii. Όταν $x\in(-\infty,1)$, $f(x)\in\mathbb{R}$ και το ίδιο όταν $x\in(1,+\infty)$, συνεπώς η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες. Το σύνολο τιμών βρίσκεται με τη μονοτονία και τα αντίστοιχα όρια.

Δ2. Αρχικά ζητάμε $\dfrac{x^{2}+2x}{5x-2}>0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$. Στη συνέχεια, λογαριθμίζουμε οπότε έχουμε: $-x^{2}+3x-2=\ln\left(\dfrac{x^{2}+2x}{5x-2}\right)$. Αν θεωρήσουμε πως $x\in\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$, τότε η τελευταία ισότητα γράφεται: $\ln(5x-2)+5x-2=\ln(x^{2}+2x)+x^{2}+2x$, οπότε ονομάζω $g(x)=\ln x+x$ και η εξίσωση γίνεται: $g(x^{2}+2x)=g(5x-2)\xleftrightarrow{g\text{ γν. αύξ.}}x^{2}+2x=5x-2$ $\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$, ρίζες οι οποίες είναι δεκτές, αφού ανήκουν στο $\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$. Αν όμως $x\in(-2,0)$, ισότητα γράφεται: $-x^{2}+3x-2=\ln(-x^{2}-2x)-\ln(2-5x)\Leftrightarrow$ $\ln(-x^{2}-2x)+x^{2}+2x=\ln(2-5x)+5x-2$, οπότε θέτωντας $g(x)=\ln(-x)+x$, $x\in(-2,0)$ έχουμε πάλι: $g(x^{2}+2x)=g(5x-2)$ και καταλήγουμε στις ίδιες λύσεις 1 και 2 που όμως είναι μή δεκτές αφού $x\in(-2,0)$.