ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΠ2-1718

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών **(9 μονάδες)**

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής

(3 μονάδες)

Α3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»:

1. Οι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα διάστημα, έχουν σύνολο τιμών επίσης ένα διάστημα.
2. Ισχύει η σχέση : $|\eta\mu x|<|x|, \ \forall x\in\mathbb{R}^*$.
3. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=k,\ k>0$, τότε ισχύει ότι $kf(x)>0$ για τιμές του x κοντά στο α.
4. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$.
5. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)|=a,\ a>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a$ ή $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-a$

(10 μονάδες)

Α4. Δίνεται ότι: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a,\ a<0\ \ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty$. Με αυτό το δεδομένο, χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

1. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=-\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=-\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=+\infty$

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$B1.\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x-5x}{x^2+3x}$

$B2.\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{3x+10}-\sqrt{4x+1}-1}$

$B3.\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(x-2\right)^3\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{5}{x-2}+e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\right]$

$B4.\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}-x^2+4}{|x^2-3x|-2}$

$B5.\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2+3}}$

(5 μονάδες για κάθε όριο)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$f(x)=\dfrac{ax^2+\beta x+1}{x+2},\ \ \mu\varepsilon\ \ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2,\ \ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-3,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*.$

i. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β. **(5 μονάδες)**

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f(3x)-x\cdot f(2x)\cdot\eta\mu x}{x^2f(x)-2x^3}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **(4 μονάδες)**

Γ2. Δίνεται ότι τη συνεχή στο R συνάρτηση g ισχύει η σχέση:

$(x-3)g(x)\le x\cdot\eta\mu(x-3),$ για κάθε $x\neq 3$.

i. Να βρείτε το $g(3)$. **(4 μονάδες)**

ii. Να δείξετε ότι η $g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,8). **(5 μονάδες)**

Γ3. Αν για τη συνεχή στο R συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις:

$f(1) < 2$ και $|f^2(x) - 4xf(x) + 4| = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο [1,4] συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f(1)\cdot f(2)\cdot f(4) = -8$. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δεν τέμνει τον xx′, να δείξετε ότι:

Δ1. Η συνάρτηση f παίρνει μόνο αρνητικές τιμές. **(5 μονάδες)**

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [1,4]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = -2$.

(10 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\xi) + \xi = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [1,4].

(10 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α: Α3: Λ – Σ – Σ – Σ – Λ Α4: Σ – Λ – Λ

ΘΕΜΑ Β:

Β1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}-5\right)}{x(x+3)}=\ldots=0$ Β2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}+\dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{x-2}}=\ldots=\dfrac{7}{6}$

Β3. $\lim\limits_{x\to 2}e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}=0$, *και κριτήριο παρεμβολής στο υπόλοιπο, δίνει τελικά* 0.

Β4. *Δεν υπάρχει γιατί* $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=5\neq 3=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$

Β5. *Με κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο δίνει τελικά* 0.

ΘΕΜΑ Γ: Γ1: i. $\alpha=2,\ \beta=1$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\dfrac{f(3x)}{x}-\dfrac{f(2x)}{x}\eta\mu x\right)}{x^2\left(f(x)-2x\right)}\cdot x\eta\mu\dfrac{1}{x}=\ldots=-2$

Γ2: i. $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=g(3)=\ldots=3$ ii. *Με θεώρημα* Bolzano *στο* $[3,8]$, $g(8)\leq\dfrac{8}{5}\eta\mu 5<0$

Γ3: *Αν* $g(x)=f^2(x)-4xf(x)+4$, $g(x)\neq 0$ *άρα η* $g(x)$ *διατηρεί πρόσημο*, $g(1)=\left(f(1)-2\right)^2$ *άρα* $g(x)>0$ *συνεπώς* $f^2(x)-4xf(x)+4=5\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left(f(x)-2x\right)^2=1+4x^2\Leftrightarrow$ $|f(x)-2x|=\sqrt{1+4x^2}$, *θέτω* $h(x)=f(x)-2x\neq 0$, $h(1)<0$, *άρα τελικά*: $f(x)=2x-\sqrt{1+4x^2}$.

ΘΕΜΑ Δ: Δ1: Η f *διατηρεί πρόσημο*

Δ2: *Έστω ότι* $f(x)\neq -2$ *για κάθε* x. *Τότε η συνάρτηση* $g(x)=f(x)+2$ *διατηρεί πρόσημο οπότε προκύπτει ότι* $f(1)f(2)f(4)>-8$ ή <-8, *άτοπο.*

Δ3: *Ότι και στο* Δ2 *για την συνάρτηση* $h(x)=f(x)+x$