ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ –ΕΠ1/1718

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x. (Μονάδες 10)

Α2. Πότε ορίζεται η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g; (Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

α. Η ευθεία $y=y_0$ τέμνει την γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης, σε ένα το πολύ σημείο.

β. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} εφόσον είναι γνήσια μονότονες, έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α, τότε και η f/g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού Α.

δ. Αν ισχύει ότι $(f\circ f)(x)=x,\ \text{για κάθε}\ x\in A_f,\ \text{τότε}\ f^{-1}(x)=f(x)=x.$

ε. Αν οι f , g έχουν πεδίο ορισμού όλο το R, τότε ισχύει ότι: $f\circ g=g\circ f$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+x-1\ \text{και}\ g(x)=e^{-x}$

Β1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ και να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 6)

Β2. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{1}{e^{x^2+1}}+1<x^2+\dfrac{1}{e^2}$ (Μονάδες 10)

Β3. Θεωρώντας δεδομένο ότι η συνάρτηση $f^{-1}\circ g$ ορίζεται για χ>0, να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι είναι περιττή. (Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και στη συνέχεια ότι είναι γνήσια φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)

Γ3. Αν το σύνολο τιμών της είναι όλο το R , να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της. (Μονάδες 5)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{1}{2}\left(e^{-x^2-1}-e^{x^2+1}\right)=\dfrac{1-e^4}{2e^2}$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το R ισχύει η σχέση:

$$e^{f(x)-x}=\frac{1}{f^2(x)-4f(x)+7}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $x-f(x)\geq \ln 3$ (Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (Μονάδες 8)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=x. (Μονάδες 6)

Δ4. Αν $A(x,f(x))\ \text{και}\ B(f(x),x)$ είναι δύο σημεία των f και f^{-1} να αποδείξετε ότι για την απόσταση ΑΒ ισχύει ότι: $AB\geq\sqrt{2}\ln 3$ (Μονάδες 5)

Απαντήσεις:

A3: Σ-Σ-Λ-Λ-Σ

B1. $(f\circ g)(x) = -x + e^{-x} - 1,\ A = \mathbb{R}.$

B2. $(f\circ g)(x^2+1) < (f\circ g)(2) \xleftrightarrow{fog \searrow} x^2+1 > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

B3. Η f^{-1} *είναι γνήσια αύξουσα, η* g *γνήσια φθίνουσα*, *άρα* $f^{-1}\circ g$ *γνήσια φθίνουσα*.

Γ1. $A = \mathbb{R},\ f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = -f(x)$

Γ2. *Έστω* $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 > 0$ *άρα* $\sqrt{{x_1}^2+1} - x_1 > \sqrt{{x_2}^2+1} - x_2 ...$ *άρα* $f \searrow$

Αν $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 > -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow f(-x_1) < f(-x_2) \xleftrightarrow{f\ \text{περιττή}} -f(x_1) < -f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Γ3. $y = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x = e^y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(e^{-y} - e^{y}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{x}\right)$

Γ4. $f^{-1}(x^2+1) = f^{-1}(2) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = \pm 1$

Δ1. *Ξεκινάμε "ελενίζοντας"*, *οπότε* $f(x) - x = -\ln((f(x)-2)^2+3) \Leftrightarrow$ *Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι* : $\ln((f(x)-2)^2+3) \geq \ln 3 \Leftrightarrow (f(x)-2)^2 \geq 0$

Δ2. *Είναι* $e^{f(x)}\ln\left((f(x)-2)^2+3\right) = e^x$, *οπότε ξεκινώντας με* $f(x_1) = f(x_2)$ *χτίζουμε τον τύπο και προκύπτει* $e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. *Είναι* $f^{-1}(x) = \ln\left((f(x)-2)^2+3\right) + x$

Δ3. *Στη σχέση* $x - f(x) \geq \ln 3$, *θέτω όπου* x *το* $f^{-1}(x)$ *και προκύπτει* $f^{-1}(x) - x \geq \ln 3 > 0$.

Δ4. *Βρίσκουμε την απόσταση* $AB = \sqrt{2\left(x - f(x)\right)^2} = \sqrt{2}\left(x - f(x)\right) \geq \sqrt{2}\ln 3$.