ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ –ΕΠ1/1718

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x. (Μονάδες 10)

Α2. Πότε ορίζεται η σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g; (Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

α. Η ευθεία $y=y_0$ τέμνει την γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης, σε ένα το πολύ σημείο.

β. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} εφόσον είναι γνήσια μονότονες, έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α, τότε και η f/g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού Α.

δ. Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = x,\ \text{για κάθε}\ x \in A_f,\ \text{τότε}\ f^{-1}(x) = f(x) = x.$

ε. Αν οι f , g έχουν πεδίο ορισμού όλο το R, τότε ισχύει ότι: $f \circ g = g \circ f$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + x - 1\ \text{και}\ g(x) = e^{-x}$

Β1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 6)

Β2. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{e^{x^2+1}} + 2 < x^2 + \frac{1}{e^2}$ (Μονάδες 10)

Β3. Θεωρώντας δεδομένο ότι η συνάρτηση $f^{-1} \circ g$ ορίζεται για x>0, να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι είναι περιττή. (Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και στη συνέχεια ότι είναι γνήσια φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)

Γ3. Αν το σύνολο τιμών της είναι όλο το R , να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της. (Μονάδες 5)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{2}\left(e^{-x^2-1} - e^{x^2+1}\right) = \frac{1-e^4}{e^2}$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το R ισχύει η σχέση:

$$e^{f(x)-x} = \frac{1}{f^2(x) - 4f(x) + 7}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $x - f(x) \geq \ln 3$ (Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (Μονάδες 8)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=x. (Μονάδες 6)

Δ4. Αν $A(x, f(x))\ \text{και}\ B(f(x), x)$ είναι δύο σημεία των f και f^{-1} να αποδείξετε ότι για την απόσταση ΑΒ ισχύει ότι: $AB \geq \sqrt{2}\ln 3$ (Μονάδες 5)

Απαντήσεις:

Α3: Σ-Σ-Λ-Λ-Σ

Β1. $(f\circ g)(x)=-x+e^{-x}-1,\ A=\mathbb{R}.$

Β2. $(f\circ g)(x^2+1)<(f\circ g)(2)\xleftrightarrow{fog\searrow}x^2+1>2\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Β3. Η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα, η g γνήσια φθίνουσα, άρα $f^{-1}\circ g$ γνήσια φθίνουσα.

Γ1. $A=\mathbb{R},\ f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)=-f(x)$

Γ2. Έστω $x_1<x_2<0\Leftrightarrow -x_1>-x_2>0$ άρα $\sqrt{x_1^2+1}-x_1>\sqrt{x_2^2+1}-x_2$... άρα $f\searrow$

Αν $0<x_1<x_2\Leftrightarrow 0>-x_1>-x_2\Leftrightarrow f(-x_1)<f(-x_2)\xleftrightarrow{f\ \text{περιττή}}-f(x_1)<-f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Γ3. $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x=e^y\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(e^{-y}-e^{y}\right)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$

Γ4. $f^{-1}(x^2+1)=f^{-1}(2)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=\pm1$

Δ1. Ξεκινάμε "ελενίζοντας", οπότε $f(x)-x=-\ln((f(x)-2)^2+3)\Leftrightarrow$ Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι : $\ln((f(x)-2)^2+3)\geq \ln3\Leftrightarrow (f(x)-2)^2\geq 0$

Δ2. Είναι $e^{f(x)}\ln\left((f(x)-2)^2+3\right)=e^x$, οπότε ξεκινώντας με $f(x_1)=f(x_2)$ χτίζουμε τον τύπο και προκύπτει $e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$. Είναι $f^{-1}(x)=\ln\left((f(x)-2)^2+3\right)+x$

Δ3. Στη σχέση $x-f(x)\geq \ln3$, θέτω όπου x το $f^{-1}(x)$ και προκύπτει $f^{-1}(x)-x\geq\ln3>0$.

Δ4. Βρίσκουμε την απόσταση $AB=\sqrt{2\left(x-f(x)\right)^2}=\sqrt{2}\left(x-f(x)\right)\geq\sqrt{2}\ln3.$