ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΩΝ

$$\left(x \to x_o\right)$$

Α. Ρητή της μορφής (0/0), με παραγοντοποίηση εμφανίζουμε το ($x-x_o$) σε αριθμητή και παρονομαστή, απλοποιούμε και στη συνέχεια κάνουμε αντικατάσταση σε ό,τι έμεινε!

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-5x-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+7x+8}{x^3+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^6-64}{x^4+2x^3-8x-16}$

Β. Όριο άρρητης (0/0) με τετραγωνικές ρίζες. Συζυγή παράσταση όπου υπάρχουν παραστάσεις με ρίζες που μηδενίζονται, εμφανίζουμε και πάλι τον παράγοντα ($x-x_o$) , απλοποιούμε, αντικαθιστούμε με x_o.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2-3x}-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-2x+8}-\sqrt{x^3+24}}$

Γ. Όριο άρρητης (0/0) με κυβικές ρίζες. Συζυγή παράσταση όπου απαιτείται, ενεργούμε στη συνέχεια όπως και στο βήμα Β.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x^2-3x}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt[3]{1-7x}}{\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{3-5x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt{x^2-2x+8}-\sqrt{-8x}}$

Δ. Όριο άρρητης (0/0) με ριζικά διαφόρων τάξεων ή παραστάσεις όπου απαιτείται διάσπαση. Προσοχή, τα όρια στα οποία θα «σπάσουμε» το αρχικό, πρέπει να διατηρούν τη μορφή (0/0).

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x+6}+\sqrt{x+2}-6}{x^2-4}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt[3]{1-7x}}{x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt[3]{6-x}-1}{x^2+2x}$

Ε. Όριο παράστασης με απόλυτη τιμή , όπου αυτό που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο δεν μηδενίζεται. Βγάζουμε την απόλυτη τιμή κρίνοντας το πρόσημο της παράστασης μέσα σε αυτό, προχωρούμε όπως στο βήμα Α.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-4|-5}{|1-x|-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-3x+1|-|x^3-7|}{|x^3+x|-10}$

ΣΤ. Όριο παράστασης με απόλυτη τιμή, όπου αυτό που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο μηδενίζεται. Ελέγχουμε μήπως ο όρος που μηδενίζεται με το απόλυτο, μπορεί να βγει κοινός παράγοντας σε αριθμητή και παρονομαστή. Αν όχι, φτιάχνουμε πινακάκια για το πρόσημο των παραστάσεων που μηδενίζονται και παίρνουμε πλευρικά όρια.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2+x-12|}{|2x^2-5x-3|}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|^3+x+1}{|x^2+5x+4|}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x^2+x-2|-|x^3+8|}{|x^2-4|}$

Ζ. Χρήση κριτηρίου παρεμβολής, όταν η f(x) δίνεται εγκλωβισμένη από την αρχή ή όταν δίνεται σχέση της μορφής $|f(x)|<g(x)$, την οποία εμείς μετατρέπουμε σε διπλή ανίσωση για να λύσουμε. Υπάρχει ακόμα η περίπτωση του να πολ/με παράσταση που τείνει στο 0 με κάποια τριγωνομετρική που παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1. Βάζουμε εμείς απόλυτη τιμή, μετατρέπουμε σε διπλή ανίσωση και κάνουμε πάλι χρήση του

κριτηρίου παρεμβολής.

1. Αν ισχύει $3x \le f(x) - x^2 + 2x \le 5x - 4$, βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

2. Αν ισχύει η σχέση : $\left|\frac{f(x)-2x+1}{x-3}\right| \le x^2 + 2$, υπολογίστε το $\lim_{x\to 3} f(x)$.

3. Να βρείτε το : $\lim_{x\to 2}[\left(x^2-4\right)\cdot \eta\mu\frac{5}{x-2}]$

Η. Τριγωνομετρικά όρια τα οποία στηρίζονται στις σχέσεις: $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$.

Ξεκινάμε με τις πιο απλές μορφές.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{7x}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 3x}{2x}$ 4. $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\eta\mu 5x}{x+\eta\mu 3x}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x^2+2x+4}-2}$ 6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3+\varepsilon\varphi x}{2x+\eta\mu 2x}$ 7. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 3x + x^2}{4x^2+\eta\mu^2 5x}$

Θ. Υπολογισμός ορίων της μορφής (0/0) όπου απαιτείται αλλαγή μεταβλητής:

1. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}-2}{\sqrt[6]{x-1}-1}$ 2. $\lim_{x\to \pi}\frac{\eta\mu(2x-\pi)}{x^2-\pi^2}$ 3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\eta\mu^2 x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+9}-3}$

Ι. Όταν δίνεται το όριο μιας παράστασης και ζητείται το όριο ενός «τμήματος» αυτής. Στην περίπτωση αυτή , ακολουθούμε τη διαδικασία Θ.Λ.L (θέτω, λύνω, limαρω!!!). Ονομάζω με μια βοηθητική συνάρτηση την παράσταση της οποίας γνωρίζω το όριο, λύνω ως προς αυτό του οποίου ζητείται το όριο και βάζω lim και στα δύο μέλη.

1. Αν ισχύει $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-2}{x+3} = 5$, να βρείτε τα : $\lim_{x\to -3} f(x)$, $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)+7-x^2}{x^2+3x}$, $\lim_{x\to 2}\frac{f(2x-7)-2}{x-2}$

2. Αν ισχύει $\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-3}{x-2} = 7$, να βρείτε τα : $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-3}{x-3}$, $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 4}\frac{f(x-1)-x+1}{x^2-16}$

ΙΑ. Όταν είμαστε στην περίπτωση $\left(\frac{a}{0}\right)$, γνωρίζουμε ξεκινώντας πως τελικά το όριο θα είναι άπειρο.

Αρκεί να προσδιορίσουμε το πρόσημο του παρονομαστή. Οπότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις :
α. Ο παρονομαστής διατηρεί πρόσημο, οπότε η απάντηση είναι άμεση. Θυμίζω πως εκτός από τις κλασικές περιπτώσεις όπου έχουμε παρονομαστές της μορφής: $|A(x)|$, $A^{2\nu}(x)$, $\sqrt{A(x)}$, διατηρούν πρόσημο και οι ποσότητες :

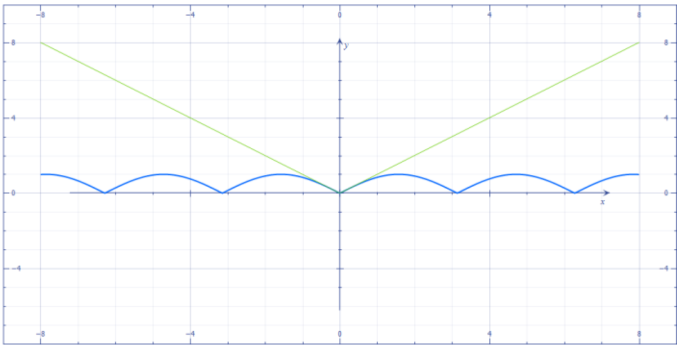
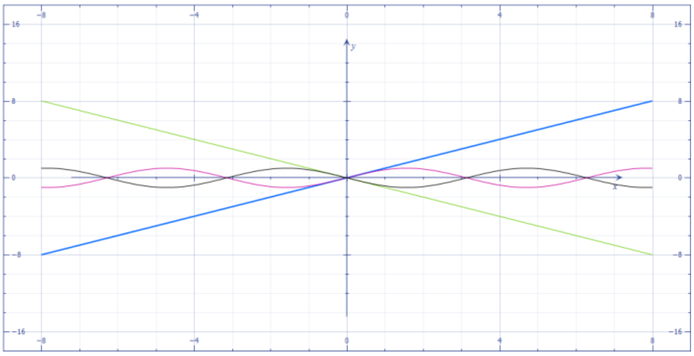
$x\cdot\eta\mu x > 0$ όταν $x \to 0$ και $x\cdot\left(e^x-1\right) > 0$ όταν $x\to 0$. Ομοίως, οι ποσότητες $(1\pm\eta\mu x)$ και $(1\pm\sigma\upsilon\nu x)$ είναι μη αρνητικές.

β. Ο παρονομαστής δεν διατηρεί πρόσημο. Τότε, φροντίζουμε να εμφανίσουμε στον παρονομαστή την ποσότητα $(x-x_o)$ και να πάρουμε πλευρικά όρια.

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x^2-5x+6}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{x^2\eta\mu^2 x}$ 3. $\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{\sqrt{x+6}-2}$ 4. $\lim_{x\to 4}\frac{3}{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-4}$

Χρήσιμες (και κρίσιμες!) συμβουλές

1. Μην «σπάτε» το ζητούμενο όριο σε επιμέρους όρια αν δεν έχετε αποδείξει ότι τα επιμέρους όρια υπάρχουν! Κρατήστε όλη την παράσταση μέσα σε αγκύλη αν χρειαστεί να τη διασπάσετε σε άθροισμα ορίων.
2. Αν μέσα στην ίδια παράσταση έχετε ριζικά διαφορετικών τάξεων της ίδιας παράστασης, ονομάστε με βοηθητικό άγνωστο το ριζικό με τάξη που ισούται με το ΕΚΠ των τάξεων των ριζικών. Αν, για παράδειγμα στο ίδιο όριο υπάρχουν τα $\sqrt[3]{x+1}, \sqrt[4]{x+1}, \sqrt{x+1}$, ονομάστε $y=\sqrt[12]{x+1}$.
3. Αν μια συνάρτηση έχει δοθεί ως άρτια ή περιττή, θα χρειαστεί να ονομάσετε y το (-x).
4. Αν ισχύει ότι f(x)>g(x) ή $f(x) \geq g(x)$ και υπάρχουν τα όρια τους καθώς το x τείνει στο x_o, τότε μπορείτε να ισχυριστείτε ότι ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$.

5. Αν σας ζητείται να βρείτε τις τιμές κάποιων παραμέτρων , ώστε να υπάρχει το όριο μιας παράστασης που τα περιέχει και να ισούται με γνωστό αριθμό, ξεκινήστε ονομάζοντας g(x) το όριο, απαλείψτε τους παρονομαστές και βάλτε lim και στα δύο μέλη. Έτσι θα βρείτε την τιμή μιας παραμέτρου ή μια συνθήκη. Αντικαταστήστε την τιμή ή την συνθήκη στο αρχικό όριο, κάντε απλοποιήσεις και συνεχίστε με παραγοντοποίηση και απλοποίηση.
6. Τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu a x}{\beta x} = \frac{a}{\beta}$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi\alpha x}{\beta x} = \frac{a}{\beta}$, πρέπει να τα αποδεικνύετε κάθε φορά , πολ/ντας την αρχική σχέση με $\frac{\alpha}{\beta}$ και θέτοντας y=ax.
7. Η ανισοτική σχέση $|\eta\mu x| \leq |x|$, η οποία ισχύει για κάθε χ πραγματικό, με την ισότητα να ισχύει μόνο για χ=0, δίνει ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τη λύση ανισώσεων ή εξισώσεων. Ο ασφαλέστερος τρόπος να δείτε τι ακριβώς και πότε ισχύει , είναι με τη χρήση γραφικής παράστασης:

Στην πρώτη γραφική είναι οι |ημχ| και |χ|, ενώ στη δεύτερη γραφική είναι χαραγμένες οι (ημχ), (-ημχ) (χ) και (-χ). Κοιτάξτε για παράδειγμα την ανίσωση: $\eta\mu(A(x)) > A(x) \Leftrightarrow A(x) < 0$ αφού η γραφική παράσταση του ημχ βρίσκεται πάνω από την y=x για χ<0.

$x \to \infty$

Α. Όταν πρέπει να βρούμε όριο πολυωνυμικής ή ρητής συνάρτησης, κρατάμε το μεγιστοβάθμιο όρο, ή το λόγο των δύο μεγιστοβάθμιων στις ρητές.

Β. Αν πρέπει να βρούμε όριο ρίζας, βρίσκουμε το όριο της υπόριζης ποσότητας και αν αυτό είναι συν άπειρο, τότε το αποτέλεσμα είναι συν άπειρο.

Γ. Απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ με άρρητες παραστάσεις σε αριθμητή ή/και παρονομαστή.

Για να άρουμε την απροσδιοριστία, βγάζουμε κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο σε αριθμητή και παρονομαστή. Προσοχή!!! Αυτό που βγάζετε εκτός ρίζας πρέπει να είναι μη αρνητική ποσότητα, συνεπώς του βάζουμε απόλυτη τιμή ή – καλύτερα – κρίνουμε το πρόσημο ανάλογα με το αν το χ τείνει στον συν ή το πλην άπειρο. Προσοχή ακόμα αν η τάξη της ρίζας είναι διαφορετική από το βαθμό της υπόριζης ποσότητας. Δείτε στα παρακάτω παραδείγματα πως βγάζουμε τον κοινό παράγοντα:

Όταν $x \to +\infty$:

$$\sqrt{4x^2-5x+1} = 2x\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}},\quad \sqrt[4]{x^3-2x+7} = x\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^4}},\quad \sqrt{5x^2+2x} = x\sqrt{5+\frac{2}{x}}$$

Όταν $x \to -\infty$:

$$\sqrt{4x^2-5x+1} = -2x\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}},\quad \sqrt[3]{x^2-2x+7} = -x\cdot\sqrt[3]{-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^3}},\quad \sqrt{5x^2+2x} = -x\sqrt{5+\frac{2}{x}}$$

Δ. Απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$ με άρρητες παραστάσεις.

Αθροίζουμε (πρόχειρα, με το μάτι!) τους μεγιστοβάθμιους όρους και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
α. Αν το άθροισμα είναι μηδέν, κάνουμε συζυγή παράσταση και στη συνέχεια έχουμε βρεθεί στην περίπτωση (Γ). Είναι δυνατόν να απαιτείται διάσπαση σε κλάσματα όταν υπάρχουν πάνω από δύο ριζικά στον αριθμητή και σε αυτήν την περίπτωση χρειάζεται να προσθαφαιρέσουμε κατάλληλες ποσότητες ώστε να διατηρείται στο μηδέν το αλγεβρικό άθροισμα. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+5}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x+x-\sqrt{x^2-x+5}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}+\frac{x-5}{x+\sqrt{x^2-x+5}}\right) = \dots = \frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

β. Αν το άθροισμα δεν είναι μηδέν, βγάζουμε κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{4x^2-3x-1}+\sqrt[3]{x^2+5}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-3x-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+5x-2}+4x\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Ε. Αν έχουμε τριγωνομετρικά όρια με το χ να τείνει στο άπειρο, διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:
α. Αν εμφανίζεται το (ημ(1/χ)), φροντίζουμε να «κολλήσουμε» δίπλα του το χ, ώστε να πρέπει να βρούμε

το $\lim_{x\to\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$, όπου $y=\frac{1}{x}$.

β. Τα όρια της μορφής $\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x^{\nu}}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^{\nu}}$, δείχνουμε με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής ότι τείνουν στο μηδέν.

γ. Γενικά, σε οποιαδήποτε παράσταση περιέχει τριγωνομετρικούς όρους, πρώτα ελέγχουμε αν μπορούμε να εμφανίσουμε την περίπτωση (α), διαφορετικά κάνουμε κριτήριο παρεμβολής.

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x-5}{3x^2+x-2}\cdot\eta\mu\frac{3}{x}$ 2. $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2+x\sigma\upsilon\nu x\right)$ 3. $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+3\eta\mu 2x\right)$

4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-2)\eta\mu 2x}{x^2-5x-2}$ 5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x}{x-4}$

ΣΤ. Όταν έχουμε να βρούμε όριο εκθετικής-λογαριθμικής, σε περίπτωση απροσδιοριστίας (άπειρο/άπειρο), αν το χ τείνει στο συν άπειρο, βγάζουμε κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τον όρο με τη μεγαλύτερη βάση, οπότε –κατ΄ αναλογίαν – βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο με τη μικρότερη βάση όταν το χ τείνει στο μείον άπειρο. Με τον τρόπο αυτό, το όριο των ποσοτήτων της μορφής $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$ που δημιουργούνται, είναι μηδέν.

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}-2\cdot e^{x-1}}{4^x-3^x}$ 2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{x+1}-2\cdot e^{x-1}}{4^x-3^x+1}$ 3. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\ln\left(x^2+1\right)}$