ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥΣ 1.1-και 1.3

1. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R, για την οποία γνωρίζουμε ότι: $(f\circ f)(x)=x-2,\quad x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και έχει σύνολο τιμών το R.

β) Να αποδείξετε ότι : $f^{-1}(x)=f(x)+2$

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία y=x.

δ) Αν η f είναι γνήσια αύξουσα, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία y=x.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ \ x\in[1,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Έχει ακρότατο;

β) Να βρείτε την f^{-1} και να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-2x-\sqrt{x+1}=1$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x^3-\sqrt[3]{x+6}=6,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) να λύσετε την ανίσωση: $f(|x|-15)<-33$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-2},\ \ x\in\mathbb{R}-\{2\}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα σημεία τομής της f^{-1} με τους άξονες.

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}\left(\dfrac{6-2e}{e-2}+f(\ln x)\right)=1$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-3},\ x\in\mathbb{R}-\{3\}$

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(f\circ f)^2(\ln x)-(f\circ f)(\ln x)-2<0$

γ) Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε: $f(g(x))=x+2$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2}{x}-e^{x-1}-1,\ x\in(0,+\infty)$

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f και να λύσετε την εξίσωση f(x)=0.

β) Να βρείτε το $f^{-1}(-e)$, καθώς και τη μονοτονία της f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x)=x+1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-\sqrt{x^2+4}}{\left(1+\sqrt{1+3x^2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x^2+4}\right)}=\dfrac{e^{\sqrt{x^2+4}}-e^{\sqrt{1+3x^2}}}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^{x-2}-3,\ \ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το $f^{-1}(0)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(\ln 2x) < 2$

δ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(1 + f^{-1}(x-2)) = 0$

ε) Να λυθεί η εξίσωση: $|x| - x^2 = e^{x^2-2} - e^{|x|} - 2$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $g(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

α) Να ελέγξετε αν $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (g \circ f)(\ln x)$ στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $h(\ln x) + h(x) - 1 = 0$.

γ) Να βρείτε συνάρτηση $t(x)$ τέτοια ώστε: $f(t(x)) = g(f(\ln x)$

9. Να επινοήσετε κατάλληλες συναρτήσεις, να τις μελετήσετε ως προς την μονοτονία και με τη βοήθειά τους να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(2x^2+3)^3 - 3(x^2+x+5) < (x^2+x+5)^3 - 3(2x^2+3)$

β) $e^{x^2} + \ln(x^2+2) < e^{\sqrt{x}} + \ln(\sqrt{x}+2)$

10. α) Να λυθεί η ανίσωση: $(2x-1)^2 < \ln\left(\frac{1+e^{4x}}{1+e^{4x^2}}\right) + 1$

β) Αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ώστε να ισχύει η σχέση : $f(x^2+1) + f(e^x) > f(2x) + f(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. *α) Για κάθε yo από το R, υπάρχει xo=f(yo)+2, ώστε f(xo)=yo. β) Θέτω όπου χ το $f^{-1}(x)$ στην αρχική σχέση. γ) Λύνω την f(x)=x. θέτω στην αρχική όπου x το f(x) και τελικά: χ-2=χ, αδύνατη.*
δ) Αρκεί να δείξω ότι f(x)<x, f(f(x))<f(x), x-2<f(x)<x δηλαδή -2<0 , το οποίο ισχύει.

2. *Γράφουμε την* $f(x)=(x-1)^2-1$ *, οπότε έχει ελάχιστο για x=1 την τιμή -1, είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της , η αντίστροφή της είναι η* $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+1$ *και η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την*
$f^{-1}(x)=f(x)\xleftrightarrow{f\ \gamma\nu.\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} f(x)=x\Leftrightarrow(x-1)^2-1=x\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3,\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \eta\ x=3.$

3. α) Η αντίστροφή της είναι δίκλαδη! $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x-6}, & x<-6\\ \sqrt[3]{x+6}, & x\geq -6\end{cases}$

β) Η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα και η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την
$f^{-1}(x)=f(x)\xleftrightarrow{f\ \gamma\nu.\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} f(x)=x\Leftrightarrow x^3-6=x\Leftrightarrow x^3-x-6=0\Leftrightarrow x=2.$

γ) $x\in(-12,12)$

4. α) Είναι $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right),\ A_{f^{-1}}=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

β) Δεν τέμνει τον yy΄ , τέμνει τον xx΄ στο (-1,0).

γ) Συνθέτουμε από αριστερά με την f , οπότε έχουμε:

$\frac{6-2e}{e-2}+f(\ln x)=\frac{e}{e-2}\Leftrightarrow f(\ln x)=3\Leftrightarrow \ln x=f^{-1}(3)\Leftrightarrow \ln x=\ln 3\Leftrightarrow x=3$

5. α) Είναι $f^{-1}(x)=f(x)$

β) $\ln^2 x-\ln x-2<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \ln x<-1 \text{ ή } \ln x>2\ \kappa\alpha\iota\ \ln x\neq 3\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup(e^2,e^3)\cup(e^3,+\infty)$

γ) $g(x)=f(x+2)\Leftrightarrow g(x)=3+\frac{4}{x},\ A=\mathbb{R}^*$

6. α) Είναι γνήσια φθίνουσα με μοναδική ρίζα την τιμή x=1.

β) Είναι $f^{-1}(-e)=2,\ f^{-1}\ \gamma\nu\acute{\eta}\sigma\iota\alpha\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha.$

γ) $x=f(x+1)\Leftrightarrow x=\frac{2}{x+1}-e^x-1.\ \Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ g(x)=\frac{2}{x+1}-e^x-1-x,\ g\ \gamma\nu.\ \varphi\theta\iota\nu.,\ \mu\acute{o}\nu\eta\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha\ x=0.$

δ) $\text{Η}\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota:\ f(\sqrt{1+3x^2}+1)=f\left(\sqrt{x^2+4}+1\right)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

7. α) Είναι γνήσια αύξουσα και είναι f(2)=0, $f^{-1}(0)=2$.

β) x=1-2e/e γ) $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

δ) $1+f^{-1}(x-2)=2\Leftrightarrow f^{-1}(x-2)=1\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{e}-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

ε) $f(x^2)=f(|x|)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=0,\ x=-1,\ x=1.$

8. α) $A_{f\circ g} = \mathbb{R} \neq A_{g\circ f} = (-1,1)$, άρα $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \ \forall x \in (-1,1)$.

β) $h(x) = \ln x$, $A_h = \left(\frac{1}{e}, e\right)$, x=e

γ) Είναι $t(x) = (f^{-1} \circ g \circ f)(\ln x) = f^{-1}(\ln x) = \ldots = \frac{1-x}{1+x}$ με $A_t = \left(\frac{1}{e}, e\right)$

9. α) $f(x) = x^3 + 3x$, f γν. αυξ., $f(2x^2+3) < f(x^2+x+5) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in (-1,2)$.

β) $f(x) = e^x + \ln(x+2)$, f γν. αυξ., $f(x^2) < f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in (0,1)$.

10. α) $f(x) = x + \ln(1+e^x)$, f γν. αυξ., $f(4x^2) < f(4x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in (0,1)$.

β) Επειδή $x^2 + 1 \geq 2x$ και $e^x > x$, πρέπει η f να είναι γνήσια αύξουσα.