ΣΥΝΤΑΓΕΣ ΓΙΑ ΟΣΟΥΣ ΕΧΟΥΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΙ ΤΗΝ ΥΛΗ

Ακολουθούν διάφορες επισημάνσεις-συμβουλές για την επίλυση ασκήσεων. Δεν είναι ακριβώς κατηγοριοποιημένες (δεν θα μπορούσαν να είναι, άλλωστε!) αλλά αναφέρονται σε κάποια εύκολες ή λιγότερο εύκολες διαδικασίες οι οποίες δεν είναι αυτό που λέμε «προφανείς». Ελπίζω να βοηθήσουν !

1. Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας. Αυτό πρέπει να το αποδεικνύετε :

$$\left(\text{αν } f \searrow, \text{ τότε: Έστω } x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \xleftrightarrow{f\searrow} f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)\right)$$

Είναι εξαιρετικά χρήσιμο αν πρέπει να βρείτε εμβαδόν ανάμεσα στην γραφική της αντίστροφης, τον xx΄ και τις ευθείες x=f(α), x=f(β), αφού θα χρειαστεί να βρείτε το πρόσημο της $f^{-1}(x)$, πριν ονομάσετε :

$$y = f^{-1}(x),\ f(y) = x,\ f'(y)dy = dx,\ \text{οπότε } \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} yf'(y)dy = \ldots \text{ ή}$$

μπορείτε και να το παρακάμψετε αν : $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} |f^{-1}(x)|dx = \int_{\alpha}^{\beta} |y| f'(y)dy = \ldots$ οπότε συνεχίζετε βγάζοντας το απόλυτο από το y.

2. Στα όρια όπου το x τείνει στο άπειρο και υπάρχει τριγωνομετρικός αριθμός στην παράσταση της οποίας ζητάτε το όριο, δύο δρόμοι υπάρχουν: Ή που θα βρείτε και θα απομονώσετε παράσταση της μορφής $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \eta\mu\left(\frac{\alpha}{x}\right) = \ldots = \alpha$, ή κάντε κριτήριο παρεμβολής!

3. Ισχύουν πάντα οι σχέσεις: $\ln x < x < e^x$. Επικαλεστείτε τη γραφική τους παράσταση ή ακόμα και το 4 στην από κάτω σειρά!

Επίσης, το γινόμενο

$$(x-1)\ln x \geq 0,\ \text{για κάθε } x > 0,\ \text{ενώ } x\left(e^x - 1\right) > 0 \ \text{για κάθε } x \neq 0$$

$$\text{και τέλος } x \cdot \eta\mu x > 0 \ \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Η σχέση $\ln x \leq x - 1$ ισχύει για κάθε x>0 ενώ το ίσον ισχύει μόνο για x=1. (συμπέρασμα εφαρμογής σχολικού). Αν σε αυτή τη σχέση θέσετε διαδοχικά :

Όπου x το x^2 : $\ln x^2 \leq x^2 - 1$ Όπου x το e^x : $x \leq e^x - 1$

Όπου x το e^{x^2} : $x^2 \leq e^{x^2} - 1$ Όπου x το x^x: $x\ln x \leq x^x - 1,\ x > 0.$

5. Αν σας δίνουν ότι ισχύει μια ανισοϊσότητα, θα εφαρμόσετε θεώρημα Fermat. Το ίδιο θα κάνετε αν η σχέση σας έχει δοθεί με x και y , αρκεί να ονομάσετε συνάρτηση

την παράσταση, πχ:
$f(xy) \le yx + yf(x) + xf(y)$, τότε $g(x) = f(xy) - yx - yf(x) - xf(y) \le 0 \ldots$

6. Αν έχετε βρει το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου ή σας έχει δοθεί η πληροφορία πως η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη, θυμηθείτε ότι μπορείτε να πάρετε διπλή ανίσωση εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε κατάλληλο διάστημα ή απλή ανίσωση χρησιμοποιώντας την εξίσωση της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο της γραφικής παράστασης! Μπορείτε να θυμάστε πως αν μια συνάρτηση είναι κυρτή στο [α, β] , τότε για κάθε κ, λ θετικούς αριθμούς ισχύει η ανίσωση:

$$f\left(\frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\kappa + \lambda}\right) \le \frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)}{\kappa + \lambda} \text{ από εδώ και το συνηθισμένο ζητούμενο:}$$

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \le f(\alpha) + f(\beta)$$

7. Αν σας έχει ζητηθεί το $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ και δεν έχετε τον τύπο της συνάρτησης ή την f(x) εγκλωβισμένη για κριτήριο παρεμβολής, αλλά γνωρίζετε την κυρτότητά της, βρείτε μια εφαπτομένη της σε κατάλληλο σημείο και στηριχτείτε στην ανίσωση $f(x) \le$ εφαπτομένη (κοίλη) ή $f(x) \ge$ εφαπτομένη (κυρτή) βρίσκοντας το όριο της εφαπτομένης.

8. Αν γνωρίζετε ότι :
$\ln(f(\alpha)) = f(\alpha) - 1$ ή $e^{f(\alpha)} - f(\alpha) - 1 = 0$, ονομάστε συνάρτηση $g(x) = \ln x - x + 1$ ή $g(x) = e^x - x - 1$ και με τη βοήθεια του (6) βρείτε ότι $f(\alpha) = 1$ ή $f(\alpha) = 0$.

9. Προσέξτε κάποια πράγματα που φαίνονται προφανή, αλλά βγαίνουν με αναπάντεχο τρόπο: Αν σας ζητηθεί να δείξετε ότι υπάρχει ξ ώστε f΄(ξ)=0, προφανώς το μυαλό πάει στο Θεώρημα Rolle, αλλά μήπως πρέπει απλά να βρείτε τον τύπο της f΄ και να κάνετε ένα - πτωχό πλην τίμιο- Bolzano;;
Μήπως η ανίσωση που σας ζητούν βγαίνει με απλές γνώσεις Α΄ Λυκείου ή με «χτίσιμο»; Ισχύει πάντα για παράδειγμα η σχέση:

$$-1 \le \frac{2x}{x^2 + 1} \le 1 \text{ καθώς και η: } \alpha < \frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\kappa + \lambda} < \beta \text{ για κάθε } \kappa, \lambda \text{ θετικά.}$$

$$\text{Επίσης, } \frac{\ln x}{(x+1)^2} \le \frac{\ln x}{x^2 + 1} \le \frac{\ln x}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0.$$

10. Αν πρέπει να βρείτε ολοκλήρωμα με άκρα αντίθετους αριθμούς, ελέγξτε μήπως η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι περιττή, γιατί τότε το ολοκλήρωμα είναι μηδέν! Αυτό βέβαια θέλει απόδειξη, αλλά είναι εύκολη:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{-\alpha}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = (u = -x \ldots) = 0$$

11. Αντιπαραγωγίσεις: Πολλές περιπτώσεις... Κάποιες από αυτές θέλουν ιδιαίτερη προσοχή. Επισημαίνω μερικές περίεργες:

$f''(x) = f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) \Leftrightarrow f(x) + f'(x) = ce^{x}...$

$f'(x) = 2\sqrt{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x) = 2e^{\frac{f(x)}{2}} \Leftrightarrow -\dfrac{f'(x)}{2}e^{-\frac{f(x)}{2}} = -1 \Leftrightarrow \left(e^{-\frac{f(x)}{2}}\right)' = \left(-x\right)'...$

$f'(x)F(x) + f^2(x) = 1 \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot F(x)\right)' = x'...$ (Εννοείται πως $F(x)$ είναι αρχική της $f(x)$)

$F(x) + xf(x) = ... \Leftrightarrow \left(xF(x)\right)' = ...$

Προσέξτε ιδιαίτερα τις περιπτώσεις όπου το ένα μέλος είναι γινόμενο δύο παρενθέσεων, όπου η μια είναι παράγωγος της άλλης:

$\left(x^2 - \ln x\right)\left(\dfrac{2x^2 - 1}{x}\right) = ... \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left((x^2 - \ln x)^2\right)' = ...$

12. Αν F(x) είναι μια αρχική συνάρτηση της f(x) και ζητηθεί ο υπολογισμός του $\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx$, κάνουμε παραγοντική:

$\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x'F(x)\,dx = \left[xF(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx$. Κλασική περίπτωση, η αρχική συνάρτηση της $f(x) = e^{x^2}$.

13. Αν ζητηθεί η εύρεση ορίου της μορφής: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x+\alpha) - f(x)\right)$, βρείτε την κυρτότητα της συνάρτησης f και στη συνέχεια κάντε ΘΜΤ στο (χ, χ+α). Με τη μονοτονία της f΄ φτιάχνουμε διπλή ανίσωση και τελειώνουμε κάνοντας κριτήριο παρεμβολής.

14. Μια δύσκολη περίπτωση υπολογισμού ολοκληρώματος, όπου οι συνηθισμένοι τρόποι δεν μπορούν να εφαρμοστούν είναι αυτό όπου θέτουμε u=α+β-χ... πρακτικά, σιγά μην το δείτε με τη μία! Ας επισημάνω τις δύο πιο κλασικές περιπτώσεις:

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^{2n}}{e^{x}+1}dx \ (\text{θέτω } u = -x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^{2n}e^{x}}{e^{x}+1}dx, \text{ οπότε:} 2I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^{2n}(e^{x}+1)}{e^{x}+1}dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-\alpha}^{\alpha}...$$

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^{2\nu}\chi}{\eta\mu^{2\nu}\chi + \sigma\upsilon\nu^{2\nu}\chi}dx \ \text{ ή } \ I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^{2\nu}\chi}{\eta\mu^{2\nu}\chi + \sigma\upsilon\nu^{2\nu}\chi}dx = (\text{θέτω } u = \frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx ..$$

15. Όταν δίνεται ότι ισχύει μια ανισοϊσότητα, είναι γνωστό (ελπίζω!!) ότι τα φέρνουμε όλα στο 1ο μέλος, ονομάζουμε συνάρτηση και βρίσκουμε για ποια (ή ποιες) τιμή της προκύπτει το μηδέν, οπότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fermat. Ποια είναι η συμβουλή; Ακόμα και όταν δίνεται συναρτησιακή σχέση ανισοϊσότητας με χ και y, κάνουμε το ίδιο , βρίσκοντας ποια παράσταση του χ θα βάλετε στη θέση του y (συνήθως το –χ) ώστε να προκύπτει το μηδέν στο άλλο μέλος. Κατόπιν παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως προς χ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Fermat.

16. Σας είναι ήδη γνωστό ότι αν μια συνάρτηση είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της. Εκείνο που δεν ξέρετε, είναι ότι αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα [α, β], τότε το ελάχιστο εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της σε κάποιο σημείο του [α, β] , την γραφική παράσταση της συνάρτησης και τις ευθείες με εξισώσεις χ=α και χ=β , εμφανίζεται στη θέση $x_o = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Αυτό βέβαια αποδεικνύεται : έστω ότι η εφαπτομένη για την οποία μιλάμε είναι στο σημείο ξ. Τότε το εμβαδόν που συζητάμε το εκφράζουμε ως συνάρτηση του ξ:

$$E(\xi) = \int_\alpha^\beta [f(x) - f'(\xi)(x-\xi) - f(\xi)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx - f'(\xi)\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} + \xi \cdot f'(\xi)(\beta-\alpha) - f(\xi)(\beta-\alpha)$$

οπότε παραγωγίζοντας $E'(\xi) = -f''(\xi)\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} + \xi \cdot f''(\xi)(\beta-\alpha)$...

Η παράσταση που προκύπτει αλλάζει πρόσημο πράγματι γύρω από το x_o που ανάφερα παραπάνω, στο οποίο εμφανίζεται και η ελάχιστη τιμή. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και όταν η συνάρτηση f είναι κοίλη.

17. Αν η παράγωγος συνάρτηση μια συνάρτησης f είναι άρτια, τότε , και μόνο εφόσον ισχύει f(0)=0, η f είναι περιττή. Ανάλογα, αν η f΄ είναι περιττή, η f είναι άρτια!
Δείτε:

$$\text{Έστω ότι } f'(-x) = -f'(x). \text{ Τότε } -f(-x) = -f(x) + c \xrightarrow[f(0)=0]{} f(-x) = f(x).$$

18. Τι κάνουμε σε περίπτωση που οι κλασικές συνταγές δεν πιάνουν;;; Σε πρώτη φάση, καταφεύγουμε στους ορισμούς και το «χτίσιμο» – ειδικά όταν αναζητούμε μονοτονία ή ανισώσεις. Σε δεύτερη φάση, κάνουμε Θ.Μ.Τ. Το Θ.Μ.Τ αν εφαρμοστεί για τη σωστή συνάρτηση και στο σωστό διάστημα, κάνει θαύματα !
Αν πρέπει να βρείτε όριο, αρχίστε να προσθαφαιρείτε ποσότητες στον αριθμητή ή να διαιρείτε αριθμητή και παρονομαστή με αυτό που πρέπει. Επίσης, στην εύρεση ορίου όπου χρειάζεται DLH , ίσως χρειαστεί να αντικαταστήσετε το 1/χ ή να μετατρέψετε το e^{-x} σε κλάσμα.
Μην ξεχνάτε να δικαιολογείτε την παραγωγισιμότητα οποιασδήποτε συνάρτησης πριν την παραγωγίσετε (και όχι μετά!) και όταν κάνετε DLH, στη φάση της αντικατάστασης , βεβαιωθείτε ότι η συνάρτηση στην οποία πάτε να κάνετε αντικατάσταση είναι όντως συνεχής.