ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ (ΓΕΠ3-1617)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε f γνήσια αύξουσα σε όλο το Δ, ενώ αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε f γνήσια φθίνουσα σε όλο το Δ. **(Μονάδες 10)**

Α2. i. Τι ονομάζουμε σημείο καμπής μιας συνάρτησης f; **(Μονάδες 3)**

ii. Πότε μια συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της; **(Μονάδες 2)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστές» ή «Λάθος»:

i. Μία συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα, δεν μπορεί να έχει ασύμπτωτη.

ii. Ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι η κλίση της εφαπτομένης της στο σημείο εκείνο.

iii. Αν ισχύει $\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=0$, τότε ισχύει $\lim_{x\to x_o}f(x)=+\infty$ ή $\lim_{x\to x_o}f(x)=-\infty$.

iv. Μια συνάρτηση η οποία δεν έχει κανένα κρίσιμο σημείο, δεν μπορεί να έχει ακρότατο.

v. Αν f συνάρτηση συνεχής στο R, τότε ισχύει : $\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)'=0$ **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=(x-a)^3+k,\ \ a,k\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(2,f(2))$ την ευθεία με εξίσωση $y=3a^2x-3$.

Β1. i. Να αποδείξετε ότι α=1 και k=2. **(Μονάδες 3)**

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει και άλλο ένα κοινό σημείο $B(x_1, f(x_1))$ με την εφαπτομένη της στο Α, στο οποίο η κλίση της καμπύλης f είναι τετραπλάσια από την κλίση της στο Α. **(Μονάδες 3)**

Β2. Ένα υλικό σημείο Μ(α, f(α)) κινείται πάνω στην καμπύλη της συνάρτησης f, με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του ίσο με 2 m/s. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται στον κατακόρυφο άξονα το σημείο τομής Ν της εφαπτομένης της στο Μ με τον yy΄, την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία η τεταγμένη του Μ ισούται με (-6). **(Μονάδες 9)**

Β3. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της. **(Μονάδες 5)**

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f^{-1}(\ln 2x)-5)<-1$ **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το [0,3] , παραγωγίσιμη στο [0,3] για την οποία ισχύει η σχέση $g(x)-2=(x^2-3x)g'(x),\ x\in[0,3]$. Δίνεται επίσης η συνεχής στο R συνάρτηση f καθώς και μια αρχική

F της f για την οποία γνωρίζουμε ότι $F(0)=\frac{1}{2e^4}$ και ισχύει η σχέση :

$$xg(x_1)F(x)=\frac{1}{2}g(x_2)f(x),\ \text{όπου}\ x_1,x_2\ \text{τυχαίες τιμές στο}\ (0,3),\ x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της. **(Μονάδες 6)**

Αν $g(x)=2$ για κάθε x στο διάστημα [0,3], τότε:

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{x^2-4},\ x\in\mathbb{R}.$ **(Μονάδες 7)**

Γ3. i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της. **(Μονάδες 6)**

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\alpha,\ \frac{3}{e^3}<\alpha<\frac{1}{e^4}$ είναι αδύνατη στο R. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- $2f'(0)=-\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$
- $3f'(\ln 2)+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
- $f'(x)\neq 0\ \text{και}\ f''(x)=\left(f'(x)\right)^2\cdot e^x\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$

Δ1. Να δείξετε ότι: $f'(0)=-\frac{1}{2}$, $f'(\ln 2)=-\frac{1}{3}$, καθώς και ότι υπάρχει $x_o>0$ τέτοιο ώστε $f''(x_o)=\frac{1}{\ln 64}$. **(Μονάδες 6)**

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\ln 2}\left(f''(x)\right)^2\cdot e^{-x}dx$ **(Μονάδες 4)**

Δ3. Αν είναι $f(0)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(1+e^x)-x$ **(Μονάδες 5)**

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{\int_1^2(f(x)-f(1))dx}{x-1}+\frac{\int_1^2\left(f(2)-f(x)\right)dx}{x-2}=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2). **(Μονάδες 3)**

Δ5. Να βρείτε τιμή $\xi\in(2,4)$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της f στο ξ, τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες x=2, x=4 να γίνεται ελάχιστο. **(Μονάδες 7)**