

**ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (ΓΕΠ3-1617)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε f γνήσια αύξουσα σε όλο το Δ , ενώ αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε f γνήσια φθίνουσα σε όλο το Δ . **(Μονάδες 10)**

A2. i. Τι ονομάζουμε σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ; **(Μονάδες 3)**
ii. Πότε μια συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(Μονάδες 2)**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστές» ή «Λάθος»:

i. Μία συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα, δεν μπορεί να έχει ασύμπτωτη.
ii. Ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι η κλίση της εφαπτομένης της στο σημείο εκείνο.

iii. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

iv. Μια συνάρτηση η οποία δεν έχει κανένα κρίσιμο σημείο, δεν μπορεί να έχει ακρότατο.

v. Αν f συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} , τότε ισχύει: $\left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)' = 0$ **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = (x - a)^3 + k$, $a, k \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(2, f(2))$ την ευθεία με εξίσωση $y = 3a^2x - 3$.

B1. i. Να αποδείξετε ότι $a=1$ και $k=2$. **(Μονάδες 3)**
ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει και άλλο ένα κοινό σημείο $B(x_1, f(x_1))$ με την εφαπτομένη της στο A , στο οποίο η κλίση της καμπύλης f είναι τετραπλάσια από την κλίση της στο A . **(Μονάδες 3)**

B2. Ένα υλικό σημείο $M(a, f(a))$ κινείται πάνω στην καμπύλη της συνάρτησης f , με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του ίσο με 2 m/s. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται στον κατακόρυφο άξονα το σημείο τομής N της εφαπτομένης της στο M με τον yy' , την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η τεταγμένη του M ισούται με (-6) . **(Μονάδες 9)**

B3. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της. **(Μονάδες 5)**

B4. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f^{-1}(\ln 2x) - 5) < -1$ **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[0,3]$, παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ για την οποία ισχύει η σχέση $g(x) - 2 = (x^2 - 3x)g'(x)$, $x \in [0,3]$. Δίνεται επίσης η συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση f καθώς και μια αρχική

F της f για την οποία γνωρίζουμε ότι $F(0) = \frac{1}{2e^4}$ και ισχύει η σχέση :

$$xg(x_1)F(x) = \frac{1}{2}g(x_2)f(x), \text{ όπου } x_1, x_2 \text{ τυχαίες τιμές στο } (0,3), x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της. **(Μονάδες 6)**

Αν $g(x)=2$ για κάθε x στο διάστημα $[0,3]$, τότε:

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{x^2-4}$, $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

Γ3. i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της. **(Μονάδες 6)**

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = a$, $\frac{3}{e^3} < a < \frac{1}{e^4}$ είναι αδύνατη στο \mathbb{R} . **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο \mathbb{R} και για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- $2f'(0) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- $3f'(\ln 2) + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
- $f'(x) \neq 0$ και $f''(x) = (f'(x))^2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι: $f'(0) = -\frac{1}{2}$, $f'(\ln 2) = -\frac{1}{3}$, καθώς και ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$f''(x_0) = \frac{1}{\ln 64}. \quad \text{(Μονάδες 6)}$$

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\ln 2} (f''(x))^2 \cdot e^{-x} dx$ **(Μονάδες 4)**

Δ3. Αν είναι $f(0) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$ **(Μονάδες 5)**

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{\int_1^2 (f(x) - f(1)) dx}{x-1} + \frac{\int_1^2 (f(2) - f(x)) dx}{x-2} = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$. **(Μονάδες 3)**

Δ5. Να βρείτε τιμή $\xi \in (2,4)$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της f στο ξ , τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=2$, $x=4$ να γίνεται ελάχιστο. **(Μονάδες 7)**