ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΓΕΠ3-1617

Α3: Λ-Λ-Λ-Λ-Σ

Β1. Γράφουμε την γενική μορφή της εξίσωσης εφαπτομένης :

i. $y = f'(2)x - 2f'(2) + f(2)$ *και ζητάμε* $f'(2) = 3$, $-6 + f(2) = -3$ *άρα* $3(2-\alpha)^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = 1$
και $-6 + 1 + \kappa = -3 \Leftrightarrow k = 2$.

ii. $\left(x-1\right)^3 + 2 = 3x - 3 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \xleftrightarrow{\text{Horner}} \left(x+1\right)\left(x-2\right)^2 = 0$ *άρα* $B(-1,-6)$
και η κλίση είναι $f'(-1) = 12 = 4f'(2)$.

Β2. Γράφουμε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της α και θέτω όπου χ=0 στην εξίσωση που προκύπτει, οπότε προκύπτει η σχέση:

$y = \left(a-1\right)^3 + 2 - 3a\left(a-1\right)^2$, $y = \left(a-1\right)^2\left(-1-2a\right) + 2$, *συνεπώς εφόσον το* $a'(t) = 2$ *και*

$a(t_o) = -1$ (*αφού* $f(a(t_o)) = -6$) *άρα* $y(t) = \left(a(t)-1\right)^2\left(-1-2a(t)\right) + 2$, *επομένως*

$y'(t) = 2\left(a(t)-1\right)a'(t)\left(-1-2a(t)\right) - 2a'(t)\left(a(t)-1\right)^2$, $y'(t_o) = -24m/s$

Β3. Η f είναι γνήσια αύξουσα, αφού $f'(x) > 0$ *για κάθε* $x \neq 1$ και η αντίστροφή της είναι δίκλαδη:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{2-x}, & x < 2 \\ 1 + \sqrt[3]{x-2}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Β4. Η ανίσωση $f^{-1}(f^{-1}(\ln 2x) - 5) < -1$ γράφεται

$f^{-1}(\ln 2x) - 5 < -6 \Leftrightarrow f^{-1}(\ln 2x) < -1 \Leftrightarrow \ln 2x < -6 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2e^6}$ *και τελικά* $x \in \left(0, \dfrac{1}{2e^6}\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Με αντικατάσταση στο δοσμένο τύπο είναι g(0)=g(3)=2. Επειδή η g είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, αν τα ακρότατα εμφανίζονται στα άκρα, τότε προφανώς ισχύει M=m=2. Αν το ακρότατο εμφανίζεται σε εσωτερικό σημείο ξ, τότε από το Θεώρημα Fermat θα πρέπει g΄(ξ)=0, οπότε πάλι με αντικατάσταση στον τύπο προκύπτει g(ξ)=2, άρα τελικά g(x)=2 για κάθε χ στο [0,3].

Γ2. Επειδή $g(x_1)=g(x_2)=2$, η σχέση που δόθηκε γράφεται:

$f(x) - 2xF(x) = 0 \xleftrightarrow{\cdot e^{-x^2}} \left(F(x)e^{-x^2}\right)' = 0 \Leftrightarrow F(x)e^{-x^2} = c \xleftrightarrow{x=0} c = \dfrac{1}{2e^4}$ *και παραγωγίζοντας*

την σχέση : $F(x) = \dfrac{e^{x^2-4}}{2}$ *έχουμε* $f(x) = x \cdot e^{x^2-4}$.

Γ3. Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f και παίρνουμε:

i. $f'(x) = e^{x^2-4}(2x^2+1) > 0$ *και* $f''(x) = 2xe^{x^2-4}(2x^2+3)$ *οπότε* f *κυρτή στο* $\left(0,+\infty\right)$ *και κοίλη στο* $(-\infty,0)$, *άρα έχει σημείο καμπής το* $(0,0)$.

ii. *Βρίσκω το σύνολο τιμών της* f' *για* $x \leq 0$ *και είναι το* $[e^{-4},+\infty)$,*και ομοίως για*
Αν $x > 0$, *είναι* $f'(x) \in \left(\dfrac{1}{e^4},+\infty\right)$, *οπότε δεν υπάρχει ρίζα στο* $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού γράψουμε $x^x = e^{x\ln x}$, υπολογίζουμε με χρήση DLH τα όρια. Στη συνέχεια κάνουμε ΘΜΤ για την f΄ στο διάστημα (0, ln2) και προκύπτει το ζητούμενο.

Δ2.Ξεκινάμε με την σχέση

$$\int_0^{\ln 2}\left(f''(x)\right)^2 \cdot e^{-x}dx = \int_0^{\ln 2}\left(f'(x)\right)'\left(f''(x)\right)\cdot e^{-x}dx = \frac{1}{3}\int_0^{\ln 2}3\left(f'(x)\right)'\left(f'(x)\right)^2 dx = \frac{1}{3}[(f'(x))^3]_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] = \ldots = \frac{19}{648}$$

Δ3. Η σχέση γράφεται:

$$\frac{f''(x)}{\left(\left(f'(x)\right)^2\right)} = e^x,\ -\frac{1}{f'(x)} = e^x + c \xleftrightarrow{x=0} c = 1,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ f'(x) = -\frac{1}{1+e^x} = -\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ f'(x) = -1 + \frac{e^x}{1+e^x},\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ f(x) = -x + \ln(1+e^x) + c \xleftrightarrow{x=0} c = 0,\ f(x) = \ln(1+e^x) - x.$$

Δ4. Επειδή f γνήσια αύξουσα

$$f'(x) = -\frac{1}{1+e^x} < 0,\ \gamma\iota\alpha\ x \in \left[1,2\right],\ f(x) < f(1)\ \kappa\alpha\iota\ f(x) > f(2),\ \text{οπότε κάνουμε θεώρημα}$$

Bolzano για την $h(x) = (x-2)\int_1^2 (f(x)-f(1))dx - (x-1)\int_1^2 (f(2)-f(x))dx$

Δ5. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο ξ, οπότε ονομάζουμε απλώς Ε το ολοκλήρωμα από 2 ως 4 της συνάρτησης f και έτσι το ζητούμενο εμβαδόν γίνεται:

$$T(\xi) = \int_2^4 f(x) - f'(\xi)x + f'(\xi)\xi - f(\xi)dx = \ldots = E - 6f'(\xi) + 2\xi f'(\xi) - 2f(\xi).$$

Οπότε $T'(\xi) = -6f''(\xi) + 2\xi f''(\xi) = f''(\xi)\left(-6+2\xi\right)$. Επειδή $f''(\xi) > 0$, η $T(\xi)$ έχει ελάχιστο για $\xi = 3$, οπότε εκεί παρουσιάζεται το ελάχιστο ζητούμενο εμβαδόν.