ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΕΠ2-1617

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ (Μονάδες 5)

β. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ (Μονάδες 5)

Α2. Πότε η ευθεία y=αx+β ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$; (Μονάδες 2)

Α3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle. (Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως «Σωστό» ή «Λάθος».

1. Αν $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις , τότε η σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g είναι βέβαιο ότι ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$

2. Αν για τις συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

3. Για κάθε ακέραιο αριθμό $\kappa\in\mathbb{Z}-\{0\}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\kappa})=+\infty$

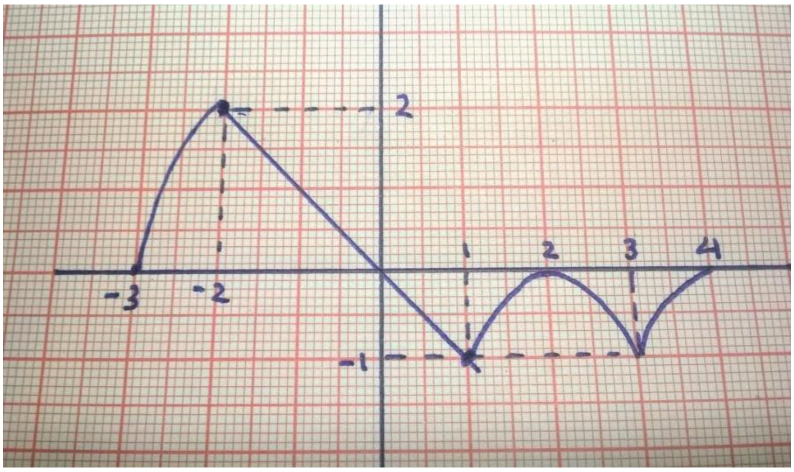
4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει , τότε είναι βέβαιο ότι το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ δεν υπάρχει.

5. Αν η f είναι συνεχής μη μηδενική συνάρτηση στο Δ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που ορίζεται στο [-3,4], για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι f(0)=0.



Β1. Να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακρότατων , τη μονοτονία της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι

$f(x) \leq 0$ *για κάθε* $x \in [-3,4]$. (6 μονάδες)

Β2. Να βρείτε την κυρτότητα της f και τις θέσεις των σημείων καμπής της.

(6 μονάδες)

Β3. Να βρείτε τον τύπο της f για $x \in [-2,1]$ και την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της (1, f(1)). (7 μονάδες)

Β4. Να υπολογίσετε τα όρια: a. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2f(x)+1}{x-1}$ b. $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1-3h)-f(1+2h)}{h}$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f(x) μια συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)+xf'(x)=e^{-xf(x)}$ *και* $f(1)=\ln 2$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x}, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ (5 μονάδες)

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. (5 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε την τιμή του θ, $\theta \in [0,2\pi]$, ώστε η εξίσωση f(x)=ημθ+2 να έχει λύση στο $[0,+\infty)$ και να βρείτε τη λύση αυτή. (7 μονάδες)

Γ4. Αν η F(x) είναι μια αρχική της f , να λύσετε την ανίσωση:

$F(\ln^2 x+2017)-F(\ln^2 x+2016)<F(\ln x+2017)-F(\ln x+2016)$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln(x^2+1)+\alpha,\ x\in\mathbb{R}$. Επίσης, η F(x) είναι αρχική της f(x) με F(0)=0 και η εφαπτομένη της F στο (0,F(0)) περνάει από το σημείο A(1,2).

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=2 και να βρείτε –αν υπάρχουν - τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f. (2 και 3 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $|F(x)|\geq 2|x|$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. (6 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της F. (5 μονάδες)

Δ4. i. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική της F(x), τους άξονες και την ευθεία x=λ με λ>0, έστω Ε(λ). (5 μονάδες)

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$ (4 μονάδες)