ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠ3-1617

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του. **(5 μονάδες)**

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat. **(10 μονάδες)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

α. Μια άρτια και παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση, έχει τουλάχιστον μια οριζόντια εφαπτομένη.
β. Μια αντιστρέψιμη συνάρτηση είναι και γνήσια μονότονη.
γ. Αν η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f , δεν ορίζεται το f(2).
δ. Αν η f είναι συνεχής και μη σταθερή στο [α, β] και ισχύει ότι $f(\alpha)+f(\beta)=0$, τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον χχ΄ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
ε. Μια συνεχής και γνήσια μονότονη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το (α, β), έχει σύνολο τιμών ανοικτό διάστημα.
(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\ln\left(e^{x}-x\right)-1$

Β1. Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το R και να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f. **(9 μονάδες)**
Β2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=2017. **(9 μονάδες)**
Β3. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=x^{2}+1-\ln\left(ex^{4}\right),\ x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

Γ1. Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(6 μονάδες)
Γ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο x_o=1 και να αποδείξετε ότι :
$x\le\sqrt[4]{e^{x^{2}+2x-3}}$ για κάθε $x>0$. **(6 μονάδες)**

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\ln x}{f(x)}, & x>0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$

i. Να βρείτε το α ώστε η g να είναι συνεχής στο R. **(4 μονάδες)**

ii. Να δείξετε ότι η g(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R. **(4 μονάδες)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε

$x > \alpha > 0$ ισχύει ότι: $2f(x) < f(x-a) + f(x+a)$ **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $x \cdot e^{-f(x)} = f^2(x) - f(x) + 2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της. **(8 μονάδες)**

Δ2. Να εξετάσετε την κυρτότητα της $f^{-1}(x)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της. **(6 μονάδες)**

Δ3. i. Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης f στο σημείο $x_0=2$ καθώς και την εφαπτομένη της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο $x_1=0$. **(6 μονάδες)**

ii. Να αποδείξετε ότι $x \geq \ln\left(\frac{x+2}{x^2-x+2}\right)$ για κάθε $x \geq -1$ **(5 μονάδες)**