Οι αρνητικοί εκθέτες , η Β΄ Γυμνασίου και η απόγνωση!

Ξαναζώ φέτος το δράμα με τους μισούς μαθητές της Β΄Γυμνασίου, να μην μπορούν να κάνουν υπολογισμούς όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός και να δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τις ιδιότητες των δυνάμεων. Επειδή τα αριθμητικά παραδείγματα φάνηκαν ανεπαρκή, λέω να δοκιμάσω με γραπτό λόγο να ξαναεξηγήσω το μάθημα.

Ξεκινώ με το πρόσημο που έχει το αποτέλεσμα μιας δύναμης: Το αποτέλεσμα της ύψωσης σε δύναμη είναι θετικός αριθμός , με μια μόνο εξαίρεση: Όταν υψώνουμε αρνητικό αριθμό σε περιττό (μονό) εκθέτη (θετικό ή αρνητικό δεν έχει σημασία), το αποτέλεσμα είναι αρνητικός. Σε κάθε άλλη περίπτωση, όπως ανέφερα προηγουμένως, είναι θετικός. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$(-3)^{-2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{4}, 4^{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{5}, (-2)^{6}, \left(-\frac{4}{5}\right)^{2} \quad \text{δίνουν θετικό αποτέλεσμα, ενώ τα :}$$

$$(-3)^{3}, (-2)^{-5}, \left(-\frac{2}{3}\right)^{3}, \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} \quad \text{δίνουν αποτέλεσμα αρνητικό αριθμό.}$$

Ας πάμε τώρα στον υπολογισμό: όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός, είναι σαν να έχουμε εντολή να αντιστρέψουμε τον αριθμό, κάνοντας ταυτόχρονα τον εκθέτη θετικό. Αυτό ας είναι πάντα η πρώτη σας κίνηση. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το αποτέλεσμα. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = (-3)^{3} = -27, \quad (-2)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}, \quad 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3} = \frac{27}{64}$$

Προσοχή! Αν υπάρχει παρένθεση όπου μέσα είναι σημειωμένη πρόσθεση ή αφαίρεση, κάνουμε πρώτα την πράξη μέσα στην παρένθεση και αφού καταλήξουμε σε ένα κλάσμα, μετά προβαίνουμε στην ύψωση στη σημειωμένη δύναμη. Αυτό το κάνουμε είτε είναι θετικός ο εκθέτης είτε είναι αρνητικός. Κοιτάξτε προσεκτικά τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}, \quad \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{12}\right)^{-2} = (-12)^{2} = 144,$$

$$\left(\frac{4}{5}-2\right)^{2} = \left(-\frac{6}{5}\right)^{2} = \frac{36}{25}, \quad \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{-3} = (-6)^{3} = -216, \quad \left(\frac{2}{3}-1\right)^{5} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{5} = -\frac{1}{243}$$

Όλα τα παραπάνω αναφέρονται σε αριθμητικούς υπολογισμούς. Αν η παράσταση που μας δίνουν για απλοποίηση ή υπολογισμό έχει γράμματα (μεταβλητές) , ΔΕΝ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ των γραμμάτων. Όπου όμως βρεθούν παρονομαστές σε κλάσματα δυνάμεις, τις μεταφέρουμε στους αριθμητές αλλάζοντας τους το πρόσημο των εκθετών. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\left(\alpha^{-2}\beta^{-1}\right)^{3}\cdot\left(\alpha\beta^{-3}\right)^{2}=\alpha^{-6}\cdot\beta^{-3}\cdot\alpha^{2}\cdot\beta^{-6}=\alpha^{-4}\cdot\beta^{-9},\qquad \frac{x^{3}y^{-4}}{x^{-5}y^{2}}=x^{3}y^{-4}x^{5}y^{-2}=x^{8}y^{-6}$$

$$\frac{\left(x^{2}y^{-3}\right)^{-2}}{\left(x^{-2}y^{-1}\right)^{3}}=\frac{x^{-4}y^{6}}{x^{-6}y^{-3}}=x^{-4}y^{6}x^{6}y^{3}=x^{2}\cdot y^{9}$$