ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

(παράγραφοι 3.1 έως και 3.5)

Α. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

1. $\dfrac{2\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha-1}{\eta\mu^2\alpha}=1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha}$

2. $\dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

3. $\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\alpha+1}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha+1}=\dfrac{1}{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}$

4. $\eta\mu^2\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\alpha-\sigma\varphi\alpha$

5. $\sigma\upsilon\nu\alpha\left(1+\varepsilon\varphi\alpha\right)+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\left(1-\varepsilon\varphi\alpha\right)}=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}$

6. $\left(\dfrac{1}{\eta\mu\alpha}-\eta\mu\alpha\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)^2=\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha-1$

7. $\dfrac{1+\varepsilon\varphi^3\alpha}{1+\sigma\varphi^3\alpha}=\left(\dfrac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1+\sigma\varphi\alpha}\right)^3$

Β. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\mathrm{K}=\frac{\eta\mu135^o\eta\mu420^o-\sigma\upsilon\nu855^o\sigma\upsilon\nu\left(-480^o\right)}{\varepsilon\varphi\left(-480^o\right)+\sigma\varphi\left(-135^0\right)}$$

$$\Lambda=\frac{\varepsilon\varphi205^o-\varepsilon\varphi115^o}{\varepsilon\varphi245^o+\varepsilon\varphi335^o},\quad \alpha\nu\quad \varepsilon\varphi25^o\simeq 0,47$$

$$\mathrm{M}=\eta\mu\left(17\pi-\alpha\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu\left(15\pi+\alpha\right)\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\mathrm{N}=1+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\eta\mu^2\left(200^o+\alpha\right)+\eta\mu^2\left(70^o-\alpha\right)$$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

1. $\eta\mu^2\left(2\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu^2\left(\dfrac{5\pi}{6}-2\alpha\right)=1$

2. $\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=1$

3. $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{36}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{2\pi}{36}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{36}\cdot\ldots\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{17\pi}{36}=1$

Δ. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha=\frac{\eta\mu\left(3\pi+\omega\right)\eta\mu\left(6\pi-\omega\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{2}+\omega\right)\sigma\varphi\left(\frac{11\pi}{2}+\omega\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}-\omega\right)\eta\mu\left(17\pi+\omega\right)}$$

$$\beta=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\left(\omega+\frac{9\pi}{2}\right)}{\eta\mu\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\sigma\upsilon\nu\left(5\pi+\omega\right)}{1-\sigma\upsilon\nu\left(\omega-\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{1-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}-\omega\right)}-\frac{\eta\mu\left(4\pi-\omega\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(3\pi-\omega\right)-1}$$

Ε. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = 5 \cdot \eta\mu 3\chi - 1$ 2. $g(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{3} + 3$ 3. $h(x) = 5 - \eta\mu \frac{\chi}{2}$

4. $t(x) = -\sigma\upsilon\nu 2\chi + 3$ 5. $v(x) = 1 + \eta\mu 4\chi$

Ζ. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = a \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\beta x}{2} - 3,\ x \in \mathbb{R}$ με περίοδο π και μέγιστη τιμή το 2. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β καθώς και την τιμή του χ , $x \in [0, \pi]$, στην οποία παρουσιάζει ελάχιστο η συνάρτηση.

Η. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $\eta\mu 2\chi = -\sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)$ 2. $\varepsilon\varphi\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right)$

3. $\eta\mu\left(2\chi - \frac{\pi}{12}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{12} - 2\chi\right) = 2\eta\mu 3\chi$ 4. $\sigma\upsilon\nu 3\chi = -\eta\mu 3\chi$, $\chi \in (0, \pi)$

5. $\varepsilon\varphi\chi = \eta\mu\chi$ 6. $2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3} - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right) + \sqrt{3} \cdot \eta\mu(\pi + \chi) = 0$

7. $2\eta\mu^2\chi + \left(\sqrt{3} - 2\right)\eta\mu\chi - \sqrt{3} = 0$ 8. $2\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0$

9. $2\sigma\upsilon\nu^2\chi + 3\eta\mu\chi = 0$ 10. $\eta\mu^2\chi + 3\sigma\upsilon\nu^2\chi - 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0$

Ι. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = 3 - 4\eta\mu 2\chi$ *και* $g(x) = a + \sigma\upsilon\nu\beta x$

Αν η συνάρτηση g έχει την ίδια μέγιστη τιμή με την f ενώ η περίοδος της g είναι κατά π μεγαλύτερη από την περίοδο της f τότε:

1. Να βρείτε τις τιμές των α και β και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της g.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $4 \cdot g(x) - f(x) = 21,\ \alpha\nu\ x \in (-\pi, \pi)$

ΙΑ. ΘΕΜΑ 4-17846

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων *f* και *g*. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f* (*x*) και *g* (*x*), για $x \in [0, 2\pi]$.
(Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: *συν2x = συνx* (1) στο διάστημα [0, 2π]. (Μονάδες 4)

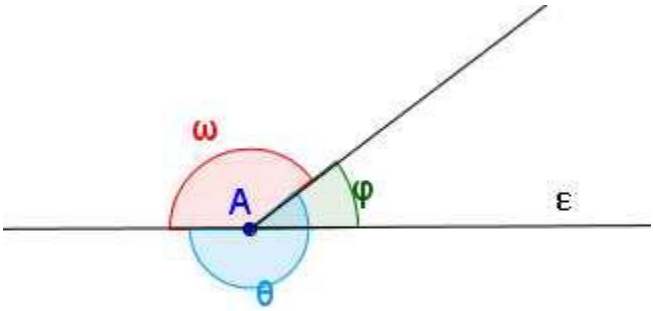
γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα [0, 2π] και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων *f* και *g.* (Μονάδες 13)

ΙΒ. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

(Μονάδες 15)



ΙΓ. ΘΕΜΑ 2 (17652)

Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$

α) Να αποδείξετε ότι είτε ημω = 0 είτε συνω = 0. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω. (Μονάδες 12)

ΙΔ. ΘΕΜΑ 2 (17656)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f; (Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ΙΕ. ΘΕΜΑ 2 (17664)

Δίνονται οι γωνίες ω, θ για τις οποίες ισχύει: ω + θ = 135°.Να αποδείξετε ότι:

α) εφ(ω + θ) = – 1 (Μονάδες 10)

β) εφω + εφθ + 1= εφω·εφθ (Μονάδες 15)

ΙΣΤ. ΘΕΜΑ 2 (17681)

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 2ημx+1, x∈R

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του x ∈ [0, 2π] η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

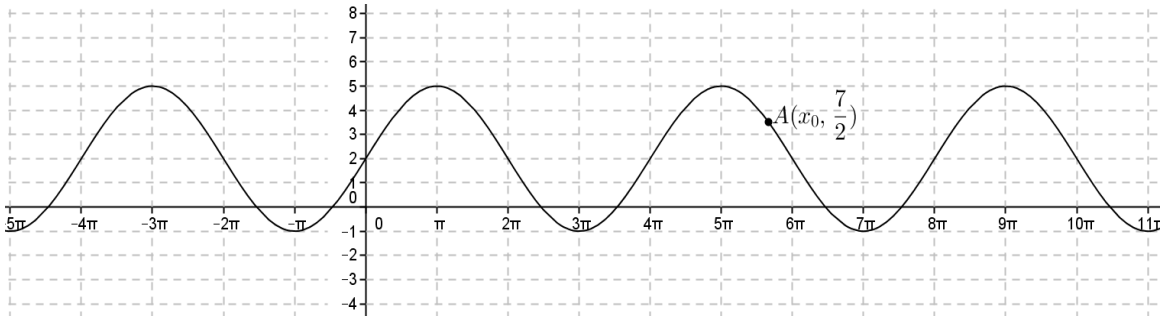
ΙΖ. ΘΕΜΑ 2 (16968)

α) Είναι η τιμή x =π/4 λύση της εξίσωσης 3συν4x + 3 = 0; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = συν4x με την ευθεία y = -1. (Μονάδες 15)

ΙΗ. ΘΕΜΑ 4 (17843)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής f(x) = ρ·ημ(ωx) + k, με ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι ρ = 3, ω =1/2 και k = 2, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μονάδες 10)

ΙΘ. ΘΕΜΑ 4 (17852)

Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση: h(t)=α·συν(ωt) +β, όπου α, ω, β πραγματικές σταθερές. Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο 100cm. Τη χρονική στιγμή t=0 το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-

ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6sec.

α) Να δείξετε ότι ω=π/3 (Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιγνιδιού από το πάτωμα 14sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης. (Μονάδες 8)

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h(t), για 0 ≤ t ≤12. (Μονάδες 6)

Κ. ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$f(t) = 12\eta\mu\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 13$ όπου t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές t = 5 και t = 8. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από t = 0 έως t = 8, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή; (Μονάδες 10)

ΚΑ. Αν ημ(α-β)=-1, να αποδείξετε ότι : συν(2 α-β)+ συνβ =0.

ΚΒ. Αν ημ(α+β)=0, να αποδείξετε ότι συν(α+2 β)=συνα.

ΚΓ. Αν α,β γωνίες του 1ου τεταρτημορίου, να δείξετε ότι: ημ(α+β) ≤ ημα+ημβ καθώς και ότι : συν(α-β) ≤ συνα+ημβ.

ΚΔ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 22,5° ,11,25° .

ΚΕ. Να δείξετε ότι: $2(\eta\mu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\alpha)=1+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$.

ΚΣΤ. Να λυθεί η εξίσωση: 4ημ2χ+3συν2χ=3 με π< 2χ ≤ 2π.

ΚΖ. Να δείξετε ότι σφα-εφα=2σφ2α

ΚΗ. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{\eta\mu 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^0} = 4.$

ΚΘ. Να αποδείξετε ότι : $\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{5\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$

Λ. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha} = \sigma\varphi\alpha.$

ΛΑ. ΘΕΜΑ 4 -20331

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου (^oC) κατά τη διάρκεια ενόςεικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} + 4, \quad 0 \le t \le 24, \ t \ \sigma\varepsilon \ \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma.$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0^oC. (Μονάδες 6) γ) Να παραστήσετε γραφικά την *f* για $t \in [0, 24]$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από0^oC. (Μονάδες 5)

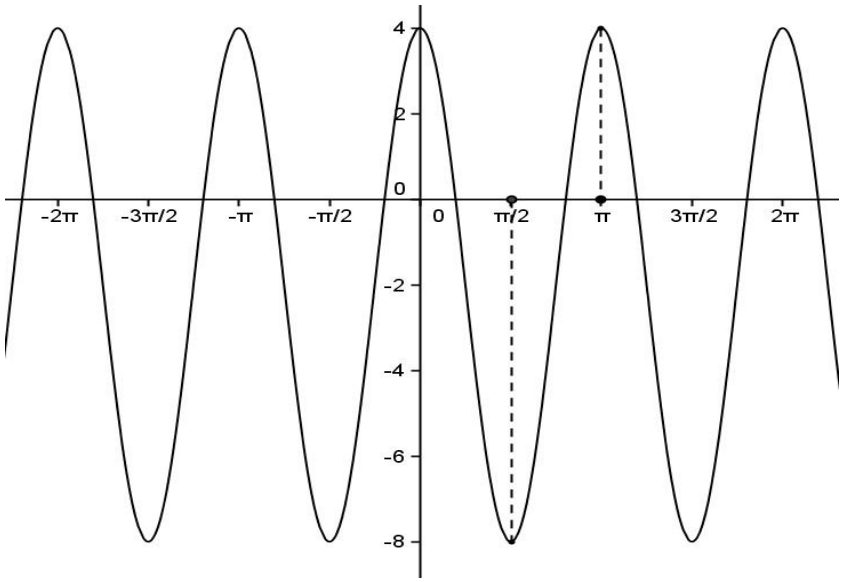
ΛΒ. ΘΕΜΑ 4- 20338

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f*, που είναι της μορφής

$f(x) = \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, όπου *α, β* πραγματικοί αριθμοί.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 4)

β) Ποια είναι η περίοδος Τ της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι α=-2 και β=6. (Μονάδες 8)

δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της *f* με την ευθεία *y* = 1 στο διάστημα [0, 2π]. (Μονάδες 9)