ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση: $2x+y-1=0$ καθώς και το σημείο Μ(3,0).

α. Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας (η) που περνά από το Μ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

β. Να βρείτε το συμμετρικό Μ΄ του σημείου Μ ως προς την ευθεία (ε).

γ. Να βρείτε ένα σημείο Α πάνω στην ευθεία (ε), ώστε η γωνία ΜΑΜ΄ να είναι 60^{o}.

δ. Να βρείτε την εξίσωση ενός κύκλου του οποίου το κέντρο βρίσκεται πάνω στην ευθεία (η), έχει ακτίνα ίση με $\sqrt{5}$ και η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενή του.

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ $\textit{για τα οποία ισχύει}$: $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0},\ \ |\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|=1, |\vec{\beta}|=3.$

α. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\quad \textit{και}\quad \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}.$

β. Να δείξετε ότι: $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}\ \textit{και}\ -\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{0}.$

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει η σχέση: $x^2\cdot\vec{a}+y^2\cdot\vec{\gamma}=4x\cdot\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα σημεία Α(1,-4) και Β(-1,2).

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x,y) για τα οποία η γωνία ΑΜΒ είναι ορθή, είναι κύκλος (C1), του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του (C1) που άγονται από το Δ(-4,0).

γ. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία στον Οx, της οποίας η διευθετούσα είναι κατακόρυφη εφαπτόμενη του (C1).

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-y^2-2x+1=0$.

α. Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους, των οποίων τις εξισώσεις και να βρείτε.

β. Να βρείτε την εξίσωση μιας τρίτης ευθείας (ε), η οποία να τέμνει τις δύο πρώτες σε δύο σημεία Α και Β, ώστε το σημείο Μ(4,1) να είναι το μέσον του ΑΒ.

γ. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΟΜΑ και ΟΑΒ.

ΘΕΜΑ 5°

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση: $x^2+y^2=5$ και το σημείο του Α(1,μ), μ>0, καθώς και η οικογένεια

$C: x^2+y^2-2\lambda x+2\lambda y+2\lambda^2-5=0,\ \lambda\in\mathbb{R}.$

α. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο του Α.

β. Να δείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του λ, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

γ. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η (ε) εφάπτεται και στον κύκλο C.

δ. Για λ=-10, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των δύο κύκλων.

ε. Να δικαιολογήσετε ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας C έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες, των οποίων και να βρείτε τις εξισώσεις.

ΘΕΜΑ 6°

Δίνεται η οικογένεια γραμμών $C: x^2+y^2-(2\lambda+4)x+(2-2\lambda)y+2\lambda+5=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}^*.$

α. Να δείξετε ότι είναι παριστάνει κύκλους, των οποίων να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλοι οι κύκλοι της οικογένειας.

γ. Να βρείτε το γ.τ. των κέντρων των κύκλων.

δ. Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία με εξίσωση : y=x-6, είναι κοινή εφαπτομένη όλων των παραπάνω κύκλων.

ε. Να βρείτε ποιος κύκλος της C διέρχεται από το σημείο Β(-1,0)

στ. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση: 2x+y-3=0, δεν μπορεί να εφάπτεται σε κανένα από τους κύκλους της C.

ΘΕΜΑ 7°

Δίνονται τα σημεία Α(λ-1,λ), Β(2λ+1,λ) και Γ(3-λ,5).

α. Να περιορίσετε κατάλληλα τις τιμές του λ, ώστε τα σημεία ΑΒΓ να σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Α.

γ. Στο τρίγωνο που προκύπτει για λ=2, φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.

δ. Να βρείτε την προβολή του ΑΔ στην ΑΒ.

ΘΕΜΑ 8°

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ για το οποίο γνωρίζουμε ότι:

$\vec{a}=|\overrightarrow{AB}|=4,\ \vec{\beta}=|\overrightarrow{A\Delta}|=3\ \ \kappa\alpha\iota\ \ (\vec{\alpha},\vec{\beta})=60^0.$

α. Να εκφράσετε τις διαγώνιες $\overrightarrow{A\Gamma}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$ σαν συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \vec{\beta}.$

β. Να βρείτε τα μήκη των διαγωνίων, καθώς και το συνημίτονο της οξείας γωνίας που αυτές σχηματίζουν.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ΘΕΜΑ 9°

Δίνονται τα σημεία Α (-1, 2), Β(1,2) και Γ(1,-2).

1. Να δείξετε ότι σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.
2. Να βρείτε σημείο Δ τέτοιο ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο παρ/μο.
3. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \ \sigma\tau o\ \ \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}.$
4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία το τρίγωνο ΑΓΜ είναι ορθογώνιο στο Μ.

ΘΕΜΑ 10°

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση : $2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=5$ και το σημείο Α(1,-1).

α. Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

β. Να βρείτε κύκλο με κέντρο το Α ο οποίος να εφάπτεται στην ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ 11°

Δίνονται τα σημεία Α(λ, 2-2λ) , Β(λ, -2-2λ) όπου το λ διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία το τρίγωνο ΑΜΒ γίνεται ορθογώνιο στο Μ, είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του λ, ο κύκλος του προηγούμενου ερωτήματος έχει το κέντρο του στην ευθεία 2x-y-8=0.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι κύκλοι που προκύπτουν εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση 3x+4y+5=0.

ΘΕΜΑ 12°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\theta = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ να υπολογίσετε:

I. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\ \vec{\beta}$.

II. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

III. Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

ΘΕΜΑ 13°

Δίνονται οι κύκλοι: $x^2 + y^2 = 4$ $\kappa\alpha\iota$ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α. Να δείξετε ότι αυτοί εφάπτονται εξωτερικά.

β. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης τους.

γ. Να βρείτε – αν υπάρχει – κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους με συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 1.

δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στους δύο αρχικούς κύκλους.

ΘΕΜΑ 14°

Έστω η οικογένεια γραμμών με εξίσωση: $(x-3y+2)a^2 + (2x-y-1)a + x - y = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το α ώστε να παριστάνει ευθεία.

β. Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται οι ευθείες της οικογένειας.

γ. Να βρείτε αν υπάρχει τιμή του α για την οποία κάποια ευθεία της οικογένειας σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία της οικογένειας η οποία να είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας του 2ου και 4ου τεταρτημορίου.

ΘΕΜΑ 15°

Οι ευθείες : $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1)y + 87 = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\varepsilon_2 : (\lambda + 2)x - (\lambda + 4)y - 22 = 0$ είναι κάθετες και το σημείο Μ(μ, μ+1) ανήκει στην ε_2.

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) Έστω *C* ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Μ και αποκόπτει από την ευθεία ε_1 χορδή με μήκος 8. Να βρείτε :

i) Τον κύκλο *C*.

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α (-10,1).

ΘΕΜΑ 16°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 4)y + 8 - \lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

α) να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Έστω ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου το κέντρο απέχει από την ευθεία ε: 3χ-4ψ+9=0 απόσταση ίση με 1/5. Να βρείτε:

i) Τον αριθμό λ

ii) Την εξίσωση ενός κύκλου C_1 που έχει κέντρο Λ(1,5) και εφάπτεται εσωτερικά στον αρχικό κύκλο.

iii) Το σημείο επαφής των δύο κύκλων καθώς και την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους στο σημείο αυτό.

ΘΕΜΑ 17ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2+2\lambda x-\lambda y-5=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε λ πραγματικό.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

γ) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που περιγράφει η παραπάνω εξίσωση διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να βρείτε.

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων καθώς και την κοινή χορδή των κύκλων.

ε) Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω κύκλους δέχεται ως εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση $x=\frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 18ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2+2xy-k\left(x+y+2k\right)=0,\ k\in\mathbb{R}^*$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων και να βρείτε τις εξισώσεις.

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του k για τις οποίες οι ευθείες απέχουν $d=3\sqrt{2}$.

γ. Για k=2, να βρείτε τη μεσοπαράλληλο των δύο παραπάνω ευθειών.

δ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που δέχεται ως εφαπτόμενες τις δύο αρχικές ευθείες και έχει κέντρο με τετμημένη 2.

ΘΕΜΑ 19ο

Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$, τότε:

α. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο είναι $\vec{x}\,//\,\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\perp\left(\vec{\beta}+\vec{x}\right)$.

β. Να βρείτε την προβολή του $\vec{x}$ στο $\vec{a}$.

γ. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{v}$ αν γνωρίζετε ότι το μέτρο του είναι τριπλάσιο από το μέτρο του $\vec{x}$ και σχηματίζει γωνία 300ο με τον άξονα χχ΄.

ΘΕΜΑ 20ο

Δίνεται η γραμμή: $\left(\lambda^2-\lambda\right)x+\left(\lambda^2+\lambda-2\right)y-\lambda^2+3\lambda-2=0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να παριστάνει ευθεία

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον χχ΄.

γ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον ψψ΄.

δ) Να βρείτε – αν υπάρχει – το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας.

ε) Βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη της ευθείας: $y=-2x+1$