

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε ότι αν δύο διανύσματα είναι κάθετα, τότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους ισούται με -1. Να εξηγήσετε τι ισχύει στην περίπτωση που δεν ορίζεται κάποιος συντελεστής διεύθυνσης. (10M)
- A2. Πότε μια υπερβολή χαρακτηρίζεται ισοσκελής; Τι τιμή έχει η εκκεντρότητά της σε αυτή την περίπτωση και ποιες οι εξισώσεις των ασύμπτωτων της; (5M)
- A3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό ή λάθος τους παρακάτω ισχυρισμούς:
- α. Για την γωνία ω μεταξύ δύο ευθειών ισχύει $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$.
 - β. Το εσωτερικό γινόμενο των μοναδιαίων διανυσμάτων \vec{i}, \vec{j} είναι ίσο με 1.
 - γ. Στην παραβολή, με p συμβολίζουμε την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα.
 - δ. Στην έλλειψη, η εστιακή απόσταση είναι μεγαλύτερη από το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.
 - ε. Ο τύπος που δίνει την απόσταση ενός σημείου A από μια ευθεία (ϵ), ισχύει μόνο εφόσον το σημείο A δεν ανήκει στην ευθεία (ϵ). (10M)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $|\vec{a}|=3, |\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, καθώς και πραγματικοί αριθμοί k, m .

B1. Αν \vec{x} είναι ένα διάνυσμα για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{x} // \vec{a} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{a} \perp (\vec{\beta} + \vec{x})$, να αποδείξετε ότι

$$\vec{x} = \frac{1}{5}(\vec{a} - 2\vec{\beta}). \quad (9M)$$

B2. Αν ισχύει η σχέση: $k \cdot \vec{a} - 5m \cdot \vec{x} = 3\vec{\beta}$, να υπολογίσετε τις τιμές των k, m . (9M)

B3. Να βρείτε την $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{x}$. (7M)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2xy - k(x + y + 2k) = 0, k \in \mathbb{R}^*$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει τις ευθείες με εξισώσεις :

$$y = -x - k \text{ και } y = -x + 2k. \quad (7M)$$

Γ2. Να προσδιορίσετε την τιμή του k για τις οποίες οι ευθείες απέχουν $d = 3\sqrt{2}$. (5M)

Γ3. Για $k=2$, να βρείτε ποια από τις δύο ευθείες βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων, καθώς και τις συντεταγμένες του αντίστοιχου σημείου. (6M)

Γ4. Για $k=2$, να βρείτε την εξίσωση μιας παραβολής με εστία στον άξονα yy' η οποία να έχει εφαπτομένη την μεσοπαράλληλη των δύο ευθειών. (7M)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η γραμμή C με εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2\lambda(x - y + 1) = 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η C είναι κύκλος για κάθε λ πραγματικό και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. (6M)

Δ2. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας διέρχονται από δύο σταθερά σημεία και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους. (6M)

Δ3. Να βρείτε - αν υπάρχει - κύκλο της οικογένειας ο οποίος να έχει ως εφαπτομένη την ευθεία $y=x$. (5M)

Δ4. Θεωρούμε τον κύκλο της C ο οποίος προκύπτει για $\lambda=0$. Έστω A ένα σημείο του κύκλου και Λ η προβολή του στον xx' . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , όπου M μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AM . (8M)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A3: Λ-Λ-Λ-Λ-Λ

B2: $k=m=1,5$ B3: $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{x} = -\frac{1}{3} \vec{a}$

Γ2. $k=2$ Γ3. Η ευθεία $y=-x-2$, το σημείο $(-1,-1)$ Γ4. Μεσοπαράλληλη η $y=-x+1$, $x^2=-4y$.

Δ1. $K(-\lambda, \lambda)$, $R = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$ Δ2. Σταθερά σημεία τα $A(-1,0)$, $B(0,1)$ κοινή χορδή η $y=x$

Δ3. Προκύπτει για $\lambda=1/2$, ο $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Δ4. Είναι η έλλειψη με εξίσωση: $x^2 + 4y^2 = 1$.