ΑΣΚΗΣΕΙΣ και ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1.ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1.1 Σε ένα σχολείο με 200 μαθητές, οι 90 έχουν ποδήλατο, 36 έχουν «παπί», ενώ 84 άτομα δεν έχουν ούτε ποδήλατο ούτε παπί. Διαλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής:
α) Να έχει παπί και ποδήλατο. β) Να έχει μόνο ποδήλατο. γ) Να έχει μόνο μηχανή. δ) Να έχει ακριβώς ένα από τα δύο μέσα μετακίνησης.

1.2 Σε ένα χωριό (τον i-Λια), το 30% των κατοίκων του έχει i-pad, το 15% έχει i-phone , ενώ το 8% έχει και τις δύο συσκευές. Διαλέγουμε ένα κάτοικο στη τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες ο κάτοικος:
α) Να έχει μία τουλάχιστον από τις δύο συσκευές. β) Να έχει μόνο i-pad.
γ) Να μην έχει καμιά από τις δύο συσκευές. δ) Να έχει ακριβώς μία από τις δύο συσκευές.

1.3 Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι $P(A)=0,4$ $\kappa\alpha\iota$ $P(B)=0,7$, $\nu\alpha$ $\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon$ $\acute{o}\tau\iota$: $\alpha)$ $0,1 \le P(A\cap B) \le 0,4$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta)$ $0,3 \le P(B-A) \le 0,6$

1.4 Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $A \subseteq B$, ενώ οι πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Β) είναι ρίζες της εξίσωσης:
$(3x-1)\cdot(2x-1)\cdot(4x+1)=0$, να υπολογίσετε:
α) Τις πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Β) β) Τα $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$ $\kappa\alpha\iota$ $P(B-A)$.

1.5. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα , ενώ για την πιθανότητα κ του ενδεχομένου ($A\cup B$) ισχύει η σχέση $k^2=2k-1$, να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι συμπληρωματικά.

1.6 Σε μια γραμμή παραγωγής CD, ελέγχουμε το προϊόν το οποίο μπορεί να χαρακτηρισθεί ως άριστο (Α), μέτριο (Μ) ή κακό (Κ). Ο έλεγχος σταματά όταν καταγραφούν δύο CD όμοιας ποιότητας ή το πολύ στην 3η δοκιμή και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Αφού βρείτε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
α) Να έχει βρεθεί ένα τουλάχιστον άριστο CD.
β) Να έχει βρεθεί ένα το πολύ κακό CD.
γ) Να έχει βρεθεί ένα άριστο και ένα μέτριο CD.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

1.7 Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δ.χ Ω , ισούται με την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β, να δείξετε ότι τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

1.8 Επιλέγουμε στην τύχη ένα φύλλο από μια τράπουλα (κλασσική , με 52 φύλλα). Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
α) Να είναι κόκκινη φιγούρα.
β) να είναι μαύρος άσσος.
γ) να είναι σπαθί ή άσσος.

1.9 Σε ένα «πειραγμένο» ζάρι , ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις πιθανότητες: P(1)=P(2)=P(3)=2P(4)=2P(5)=2P(6). Να βρείτε την πιθανότητα να φέρει κάποιος άρτια ένδειξη.

1.10 Σε ένα παιχνίδι συμμετέχουν οι παίκτες Α, Β, Γ και Δ. Αν για τις πιθανότητες που έχει καθένας να κερδίσει ισχύουν οι σχέσεις: P(A)=2P(B)=3P(Γ)=4P(Δ), να βρείτε την πιθανότητα που έχει κάθε ένας από τους παίκτες να κερδίσει.

1.11 Σε ένα λύκειο αρρένων, με το ποδόσφαιρο ασχολείται το 55% των παιδιών, με το μπάσκετ ασχολείται το 45%, ενώ με ένα ακριβώς από τα δύο αθλήματα ασχολείται το 70% των μαθητών. Να βρείτε τις πιθανότητες αν επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη, των παρακάτω ενδεχομένων:
α) Να ασχολείται με ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα.
β) Να ασχολείται και με τα δύο αθλήματα.
γ) Να ασχολείται μόνο με το μπάσκετ.
δ) Να μην αθλείται.

1.12 Σε ένα χωριό με πολλούς φιλόζωους, μόνο το 20% των σπιτιών δεν έχουν σκύλο ή γάτα. Το 55% των νοικοκυριών έχει σκύλο, ενώ το 45% έχουν μόνο σκύλο. Επιλέγουμε ένα σπίτι στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες:
α) Να έχει γάτα.
β) Να έχει μόνο γάτα.
γ) Να έχει μόνο σκύλο ή μόνο γάτα.

1.13 Οι πελάτες μιας τράπεζας σε ποσοστό 12% έχουν κάρτα DINERS και VISA. Το 35% έχει μόνο VISA ενώ το 75% έχει μία τουλάχιστον από τις δύο κάρτες. Διαλέγουμε ένα πελάτη στην τύχη. Να βρείτε την πιθανότητα ο πελάτης:
α) Να έχει DINERS.
β) Να έχει μόνο DINERS
γ) Να μην διαθέτει καμία κάρτα.
δ) Να διαθέτει ακριβώς μία από τις δύο κάρτες.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

1.14 Σε ένα σχολείο υπάρχουν 52 μαθητές που δεν διδάσκονται καμιά από τις δύο προσφερόμενες γλώσσες (Αγγλικά και Γαλλικά) και 148 μαθητές που διδάσκονται μία τουλάχιστον από τις δύο ξένες γλώσσες. Αν υπάρχουν 110 μαθητές που μαθαίνουν Αγγλικά και 80 μαθητές που μαθαίνουν Γαλλικά και επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

α) Ο μαθητής να μαθαίνει και τις δύο ξένες γλώσσες.

β) Ο μαθητής να μαθαίνει μία ακριβώς από τις δύο ξένες γλώσσες.

γ) ο μαθητής να μιλά μόνο Γαλλικά.

1.15 Σε μια κάλπη βάζουμε 10 κόκκινες μπάλες, 8 άσπρες και κάποιες πράσινες. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Να βρείτε πόσες πράσινες μπάλες πρέπει να βάλουμε στην κάλπη σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει άσπρη μπάλα να είναι 1/3.

β) Η πιθανότητα να προκύψει πράσινη ή άσπρη να είναι 7/12

γ) Η πιθανότητα να επιλέξουμε πράσινη μπάλα να είναι διπλάσια από την πιθανότητα να βγάλουμε άσπρη μπάλα.

1.16 Σε σχολείο με 200 μαθητές, οι 140 μιλούν Αγγλικά, οι 80 μιλούν Γαλλικά ενώ η πιθανότητα ένα παιδί να μιλάει και τις δύο ξένες γλώσσες είναι διπλάσια από την πιθανότητα να μη μιλά καμιά από τις δύο ξένες γλώσσες. Να υπολογίσετε:

α) Πόσα παιδιά μιλούν και τις δύο ξένες γλώσσες.

β) Πόσα παιδιά μιλούν ακριβώς μία από τις δύο ξένες γλώσσες.

1.17 Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις, αν γνωρίζετε ότι το ενδεχόμενο Α δεν είναι βέβαιο και δεν είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

$$a)\ P^2(A)+P^2(A')\geq 1-2P(A)$$

$$\beta)\ \frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(A')}>2$$

1.18 Δίνεται το σύνολο $K=\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{15}\right\}$. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A\cup B,\ A\cap B\ \ και\ \ A$ είναι τιμές που ανήκουν στο σύνολο Κ. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α) Να πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Β.

β) Να πραγματοποιείται μόνο το Α.

γ) Ένα τουλάχιστον από τα Α, Β να μην πραγματοποιείται.

δ) Να πραγματοποιείται ένα ακριβώς από τα Α και Β.

ΒΑΣΤΑΚΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

1.19 Αν σε μια κάλπη τοποθετήσουμε χ άσπρες μπάλες, όπου για το χ ισχύει η σχέση $x^2+64=16x$ και κάποιες μαύρες μπάλες και γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα εκλογής μαύρης μπάλας είναι τα $\frac{3}{4}$ της πιθανότητας να εκλεγεί άσπρη μπάλα, να βρείτε πόσες είναι οι μαύρες μπάλες.

1.20 Σε ένα τμήμα με 25 μαθητές, φοιτούν 10 αγόρια και 15 κορίτσια. Τα 6 αγόρια και τα 9 κορίτσια έχουν μαύρα μάτια. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο από την τάξη. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

α) Να είναι αγόρι ή να έχει μαύρα μάτια.

β) Να είναι κορίτσι ή να μην έχει μαύρα μάτια.

2. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ – ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΔΙΑΤΑΞΗ – ΑΠΟΛΥΤΑ – ΡΙΖΕΣ

2.1 Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $15a^3x-15a^3y+5a^2\beta x-5a^2\beta y$
2. $a^4x^2-a^3x^3-a^3x+a^2x^2$
3. $x^2-4xy^2-16+4y^4$
4. $4x^2-9y^2-6yz-z^4$
5. $4a^2x^2-4b^2x^2-9a^2y^2+9b^2y^2$
6. $3a^2x^2-3b^2x^2+6bx^3-3x^4$
7. $4xy(x-y)-6x(x-y)^2+2x(x^2-y^2)$
8. $x^2-y^2+4x-2y+3$
9. $x^2(y-w)+y^2(w-x)+w^2(x-y)$
10. $(\alpha\chi+\mu\beta\psi)^2-\mu(\alpha\psi+\beta\chi)^2$

2.2 Να απλοποιήσετε – αφού πρώτα κάνετε ομώνυμα – τα παρακάτω κλάσματα:

1. $\dfrac{2(\alpha-\beta)}{\alpha^3+\alpha^2\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^3+\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta}-\dfrac{5}{\alpha^2+\alpha\beta}$
2. $\dfrac{3\alpha+\beta}{2\alpha^2-3\alpha\beta}-\dfrac{2\alpha+\beta}{3\alpha\beta-2\alpha^2}+\dfrac{12\alpha+10\beta}{9\beta^2-4\alpha^2}$
3. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2x+y}{x^2+xy}+\dfrac{2x-y}{xy-y^2}$
4. $\dfrac{x-3}{3x^2+x}-\dfrac{x+3}{x-3x^2}-\dfrac{x}{9x^2-1}+\dfrac{4x^2-7}{9x^3-x}$

2.3 Να αποδείξετε ότι:

1. $(\alpha\chi+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta\chi)^2+(\gamma\chi+\delta\psi)^2+(\gamma\psi-\delta\chi)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\chi^2+\psi^2)$
2. $\chi^4-\psi^4-(\chi-\psi)^3(\chi+\psi)=2\chi\psi(\chi^2-\psi^2)$
3. $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3=3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

4. $(x^2-1)(y^2-1)(w^2-1)+(x+yw)(y+wx)(w+xy)=(xyw+1)(x^2+y^2+w^2+2xyw-1)$

2.4 Να απλοποιήσετε χρησιμοποιώντας ιδιότητες δυνάμεων τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή τους για τις τιμές των μεταβλητών που δίνονται κάθε φορά:

1. $\dfrac{x^{-2}\cdot(y^{-1}\cdot\frac{1}{x^{-3}})^{-2}}{\left(x^{-3}\cdot\frac{1}{y^{-2}}\right)^{-1}\cdot y^{-7}}$, $\gamma\iota\alpha\ \ x=-2015,\ \ y=2015$

2. $\dfrac{\left(x^3:y^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\cdot\frac{1}{x}\right)^{-2}}{\left(\frac{x^{-3}}{y^{-1}}:\frac{x^2}{y^3}\right)^{-1}\cdot x^{-2}}$, $\gamma\iota\alpha\ \ x=4,5\ \ y=0,222...$

2.5 Αν γνωρίζετε ότι : $\frac{1}{2}\le x<1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \frac{1}{3}<y\le 2$, να βρείτε σε ποια διαστήματα πραγματικών αριθμών ανήκουν οι παρακάτω παραστάσεις:

$a.\ 2x+3y-5\ \ b.\ 3-4x\ \ c.\ 1-\frac{3}{y}\ \ d.\ 4-6xy\ \ e.\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}\ \ f.\ 4x^2+9y^2+12xy$

2.6 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, με τη βοήθεια των συνθηκών που δίνονται σε κάθε περίπτωση:

$A=|x-2|-|3-x|+2|-x|,\quad \alpha\nu\quad 2<x<3.$

$B=|x+2|-2|x+3|+5|x|-|x+1|,\quad \alpha\nu\quad -3<x<-2.$

$\Gamma=|a-x|-|b-y|-|a-b|-|y-x|,\quad \alpha\nu\quad x<a<y<b.$

2.7 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές

$A=3x-|x-2|$ $\qquad$ $B=|2x-1|-x+1$

$\Gamma=|x-2|^2-|1-x|^2+|x+1|$ $\qquad$ $\Delta=|2-|x||$

2.8 Αν γνωρίζετε ότι |α|=3 και |β|=2, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων: Κ=|α-2β| και Λ=|4-α|+|β-2|.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

2.9 Αν ισχύει -3<χ<0 να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: Α=|$χ^2$+3χ|-|χ+2|+|χ-1| και Β=χ|χ-2|+|$χ^2$-4χ+4|+6|χ| και Γ=|χ-$χ^2$|-|4χ+12|-|χ||3-|χ||

2.10 α. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $|a|<|b| \Leftrightarrow a^2<b^2 \;\; για \;\; κάθε \;\; a,b \in \mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: |2χ-3|<|4+2χ|

γ. Αν τα για τους πραγματικούς αριθμούς α, b ισχύουν οι σχέσεις:

$|a| \neq |b| \;\; και \;\; 1+|ab|<|a+b|$, να αποδείξετε ότι: $|a|<1<|b| \;\; ή \;\; |b|<1<|a|$.

2.11 Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α και b ισχύει ότι:

$|a+b|<|a-b|$, να αποδείξετε ότι:

α. Οι α και b είναι ετερόσημοι.

β. Ισχύει η σχέση: $a|b|+b|a|=0$

γ. Αν επιπλέον των προηγούμενων σχέσεων ισχύει ότι $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1=0$, να αποδείξετε ότι α<0 και b<0.

2.12 Αν ισχύουν οι σχέσεις: $|x|<2$, $|y-3|<1005 \;\; και \;\; |3x-z|<5$ να αποδείξετε ότι: $|xy-z|<2015$

2.13 α. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και b ισχύει έστω και μία από τις σχέσεις: $|a|+|b|=0$, $a^2+b^2=0$, $|a|+|b|\leq 0$, να δικαιολογήσετε ότι α=b=0.

β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις-ανισώσεις:

$i.\ |2x-1|+|3-x|=0 \qquad ii.\ |x^2-2x|+|x^2-4|=0 \qquad iii.\ |x-2|+|y+3|\leq 0$

2.14 Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=xy+3x-y-3$, $B=4x+y-4-xy$, $\Gamma=2-2x$

α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της ποσότητας |Α|+|Β|+|Γ| .

β. Για ποια τιμή του χ η ποσότητα παίρνει την ελάχιστη τιμή της;

2.15 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-2x+1}$, $\alpha\nu \;\; 1<x<3.$

2. $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{1+2x+x^2}$, $\alpha\nu \;\; -1<x<\frac{3}{2}.$

2.16 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}$

2. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

2.17 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε άλλες με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{6}{\sqrt{3}},\ \frac{5}{\sqrt{10}},\ \frac{4}{\sqrt{6}},\ \frac{3}{2\sqrt{3}},\ \frac{x}{\sqrt{x}},\ \frac{2x^2+3}{\sqrt{4x^2+6}}.$$

2.18 Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε άλλες με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2},\ \frac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{3}},\ \frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}},\ \frac{3x}{2-\sqrt{x^2+4}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}-x}.$$

2.19 Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{9x^2-12x+4}=\sqrt{4x^2-12x+9},\quad \alpha\nu\quad \frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}.$

2.20 Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις, ενοποιώντας σε μια ρίζα κάθε παράσταση:

$$A=\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a},\quad a>0.$$

$$B=\frac{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^5}},\quad a>0.$$

2.21 Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω παραστάσεων:

$$A=(2\sqrt{3}-3)^2-(2\sqrt{3}-6)(\sqrt{3}+2)+(2+3\sqrt{3})^2$$

$$B=(\sqrt{\alpha\beta}-2)^2+(2\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-(\sqrt{9\alpha}+\sqrt{4\beta})(2\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha})$$

2.22 Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{6}$$

$$\mathrm{B}=\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^2}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^3}$$

$$\Gamma=\sqrt[6]{a^4b^5c^3}\cdot\sqrt[8]{a^5b^4c^6},\quad a=2^{-\frac{31}{24}},\ b=3^{\frac{6}{7}},\ c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$$

2.23 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}\qquad B=\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

2.24 Να γράψετε σαν μια ρίζα τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\sqrt{3\cdot\sqrt[4]{3^3\cdot\sqrt[3]{3}}}\qquad \mathrm{B}=\sqrt[5]{\alpha\cdot\sqrt{\alpha\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}}}\qquad \Gamma=\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{2}}}$$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

2.25 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha.\ \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\frac{5\sqrt{2}}{13\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{13}$$

$$\beta.\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\frac{26+\sqrt{6}+12\sqrt{10}}{30}$$

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Να λύσετε, κάνοντας και διερεύνηση όπου απαιτείται, τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $(a-3)x=a+1$ 2. $a(x-2)=x(a-3)$ 3. $\lambda(x+1)=2x(\lambda-1)$ 4. $\lambda^3x=\lambda^2$

5. $\frac{1-x}{3}-\frac{\lambda+1}{2}=1-\frac{\lambda x-2}{6}$ 6. $(\lambda^2-2\lambda)x=\lambda^2+\lambda$ 7. $(1-\lambda^2)x=\lambda-1$

8. $(\lambda^2+2)x=\lambda-2$ 9. $(a^2-\beta^2)x=a^2-a\beta$ 10. $(a-2)x=\beta+1-a$

3.2 Βρείτε την τιμή του α, ώστε η εξίσωση: $(a^2-a)x=a^2-1$ να δέχεται άπειρες λύσεις. Στη συνέχεια, για την τιμή του α που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση:

$(\lambda^2-a^2)x=2-a.$

3.3 Δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις:
$(\lambda^2-2\lambda)x=\lambda$ *και* $(\lambda^3-7\lambda^2+20)x=\lambda+1.$
Να βρείτε – αν υπάρχει – τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε να είναι και οι δύο αδύνατες. Υπάρχει τιμή του λ ώστε να δέχονται και οι δύο άπειρες λύσεις;

3.4 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $|2x-5|=4$ 2. $|1-3x|=8$ 3. $|2-x|=|3x+2|$ 4. $|x^2+3|-x=3$

5. $\frac{1-|2x-1|}{3}-\frac{3(1-|1-2x|)}{2}=1-\frac{2|2x-1|-1}{6}$ 6. $\frac{2-|3-x|}{2}-\frac{1-|12-4x|}{3}=\frac{9-|x-3|}{4}$

3.5 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $x^4-3x^2=0$ 2. $3x^7+24x^4=0$
3. $x^6-256x^2=0$ 4. $2x^5+128x^2=0$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

3.6 Φροντίστε να βρείτε σωστά τις ρίζες που βλέπετε δίπλα σε κάθε μία. Προσπαθήστε να είστε όσο το δυνατόν γρηγορότεροι και γράψτε το αποτέλεσμα σε μορφή γινομένου:

1. $2x^2-5x+3=0$ $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 2. $3x^2+5x-2=0$ $\left(-2,\frac{2}{3}\right)$ 3. $6x^2-5x+1=0$ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

4. $x^2-7x-8=0$ $(-1,8)$ 5. $-2x^2+3x+5=0$ $\left(\frac{5}{2},-1\right)$ 6. $12x^2-x-1=0$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

3.7. Στις παρακάτω δευτεροβάθμιες, οι διακρίνουσες είναι τέλεια τετράγωνα ή αναπτύγματα τετραγώνων. Βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων:

1. $2x^2-3ax-5a^2=0$ 2. $2a^2x^2-ax-1=0$ $,a\neq 0$ 3. $-3x^2-ax+4a^2=0$

4. $x^2-(3a-2)x-6a=0$ 5. $x^2+(1-3a)x-3a=0$

($\Alpha\pi\alpha\nu\tau\acute{\eta}\sigma\epsilon\iota\varsigma$: 1. $-a,\frac{5a}{2}$ 2. $\frac{1}{a},-\frac{1}{2a}$ 3. $-\frac{4a}{3},a$ 4. $3a,-2$ 5. $-1,3a$)

3.8 Ότι είπαμε και στην 3.7 άσκηση, αλλά με δύο παραμέτρους αυτή τη φορά:

1. $x^2-(2a+b)x+2ab=0$ $(2a,b)$ 2. $ax^2+(a-b)x-b=0$ $\left(1,-\frac{b}{a}\right)$

3. $2ax^2-(3a-2b)x-3b=0$ $\left(\frac{3}{2},\frac{b}{a}\right)$ 4. $bx^2+(2a+b)x+2a=0$ $\left(-\frac{2a}{b},-1\right)$

3.9 Δοκιμάστε με ριζικά τώρα:

1. $x^2-(\sqrt{3}-2)x-2\sqrt{3}=0$ $\left(\sqrt{3},-2\right)$ 2. $\sqrt{3}x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-1\right)$

3. $\sqrt{3}x^2-\left(2\sqrt{3}-1\right)x-2=0$ $\left(2\sqrt{3},-\frac{1}{3}\right)$ 4. $2x^2+\left(\sqrt{5}-2\right)x-\sqrt{5}=0$ $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-1\right)$

3.10 Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες:

1. $x^2-(2a+b)x+ab=0$ 2. $3x^2+(2a-3b)x+2ab=0$

3.11 Να λύσετε τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

1. $x^2-7x+6=0$ 2. $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$ 3. $3x^2-12x+9=0$ 4. $3x^2-5x-2=0$

5. $\sqrt{2}x^2-(1+\sqrt{6})x+\sqrt{3}=0$ 6. $ax^2-\sqrt{5}ax-a=0,\ a\neq 0$ 7. $x^2-(2a+3\beta)x+6a\beta=0$

3.12 . Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

1. $(x+3)^2-2|x+3|-3=0$ $(0,-6)$ 2. $(2x-4)^2+3|x-2|-7=0$ $(3,1)$

3. $(1-2x)^2+|4x-2|-3=0$ $(0,1)$ 4. $(3x-6)^2-|12-6x|+1=0$ $(5,-1)$

5. $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0$ $\left(2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3}\right)$

6. $3w^4-4w^2+1=0$ $\left(1,-1,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7. $8\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-2\left(\frac{2-x}{x+1}\right)-1=0$ $(3,1)$

8. $(x-3)(x+1)(x+2)(x-4)=36$ $\left(1,1\pm\sqrt{13}\right)$

3.13 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

1. $x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+2\sqrt{5}-2=0$ $(1-\sqrt{5},-2)$

2. $x^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)x+1-\sqrt{3}=0$ $\left(1+\sqrt{3},\sqrt{3}-2\right)$

3.14 Να βρείτε την τιμή των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν διπλή ρίζα και στη συνέχεια βρείτε τη διπλή ρίζα:

1. $x^2-(3\lambda+1)x+5-\lambda=0$ $\left(\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-\frac{19}{9},\ x=2 \text{ ή } x=-\frac{8}{3}\right)$

2. $x^2+(\mu-1)x+4-\mu=0$ $(\mu=-5 \text{ ή } \mu=3,\ x=3 \text{ ή } x=-1)$

3.15 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πάντα λύση και στη συνέχεια βρείτε τη λύση.

1. $x^2-(a+\beta)x+a\beta=0$ 2. $ax^2+(a+\beta)x+\beta=0$

3. $x^2+2(2\beta-a)x+a^2+4\beta^2-4a\beta=0$ $(x=a-2\beta)$

4. $4x^2-4(\beta-3a)x+9a^2+\beta^2-6a\beta=0$ $\left(x=\frac{3a-\beta}{2}\right)$

3.16 . Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $\left|2|x-1|-3\right|=5$ b. $\left|4-|x-2|\right|=3$ c. $\left|x-|x-1|\right|=1$

3.17 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $\sqrt{x^2-4x+4}=3\cdot|2-x|-8$ b. $\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{x^2+2x+1}$

c. $(x-3)^2-\sqrt{x^2-6x+9}=0$ d. $\sqrt{x^4+2x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+1}=x^2$

3.18 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

$a.\ x^2(2x-1)-2x(1-2x)=1-2x$ $\qquad$ $b.\ (x-1)(x^2-4)=(x-1)(x+2)$

$c.\ x^3-4x^2+2x-8=0$ $\qquad$ $d.\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$

3.19 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$a.\ 3x\,|x-2|=x^2\,|x-2|$ $\qquad$ $b.\ |2x+1|\cdot|x-2|=3|2-x|$

3.20 Να λύσετε τις εξισώσεις:

a. $d(2x,5)=d(3,x)$ $\qquad$ b. $d(y,-3)+d(x,1)=0$ $\qquad$ c. $d(2x,1)=\sqrt{9x^2-6x+1}$

3.21 Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x-2=0$ και έστω α και β οι ρίζες της.

α. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$K=a^2+\beta^2,\ \ L=a^3+\beta^3,\ M=\dfrac{a}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{a^2}$

β. Να βρείτε το τριώνυμο με ρίζες τους αριθμούς $a^2\beta\ \ και\ \ a\beta^2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-\sqrt{L}\cdot x+M=0$

3.22 Δίνεται η εξίσωση $x^2-(k-1)x-16=0,\ k\in\mathbb{R}$..

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του k.

β. Αν γνωρίζετε ότι ο λόγος των ριζών του είναι ίσος με -4, να βρείτε τις ρίζες και τον αριθμό k.

3.23 Δίνεται η εξίσωση $x^2-2kx+27=0,\ k\in\mathbb{R}$.

α. Αν υποθέσετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες με τη μία να είναι τριπλάσια της άλλης, να βρείτε την τιμή του k καθώς και τις ρίζες.

β. Είναι δεκτές οι τιμές που βρήκατε; Ελέγξτε τη διακρίνουσα.

3.24 Δίνεται η εξίσωση: $x^2+(k-2)x-8=0,\ k\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού k.

β. Αν η μία ρίζα ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και τον k.

3.25 Αν ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-3ax-\beta=0,\ a,\beta\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι ο αριθμός β είναι ρίζα της εξίσωσης: $3x^2+8a^2x+4a^4=0$. Μπορείτε να βρείτε το πρόσημο των ριζών καθώς και την άλλη ρίζα του 1ου τριωνύμου;

3.26 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(k-1)x+k-2=0,\ k\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει:

i. Δύο θετικές ρίζες $\qquad$ ii. Δύο αρνητικές ρίζες $\qquad$ iii. Δύο ετερόσημες ρίζες

iv. Δύο αντίθετες ρίζες $\qquad$ v. Δύο αντίστροφες ρίζες.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

3.27 Δίνεται η εξίσωση: $x^2+(2k-1)x+k^2-2=0,\ k\in\mathbb{R}$.

α. Βρείτε για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Να βρείτε το k ώστε να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

γ. Να βρείτε το k ώστε να έχει δύο αντίθετες ρίζες.

3.28 Δίνεται η εξίσωση : $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0,\quad a\in(-1,0)$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου ως συνάρτηση του α.

β) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του τριωνύμου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^2-2(a+1)x+1=0$

4. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 Να βρείτε αν συναληθεύουν τα παρακάτω ζεύγη ανισώσεων και να γράψετε τα αποτελέσματα σε μορφή ένωσης διαστημάτων:

$1.\begin{cases}3x\le -2\\ 2x\ge -5\end{cases}\quad 2.\begin{cases}1-2x\le 3(1-x)\\ 2(x-3)\le x-1\end{cases}\quad 3.\begin{cases}5x-3\le 7(x+3)\\ 4(1-x)<5(2-x)\end{cases}$

4.2 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$1.|2x-5|<4\quad 2.|1-3x|\ge 8\quad 3.|2-x|>|3x+2|\quad 4.|x^2+3|-|x-1|\le 2+x^2$

$5.\ \dfrac{1-|2x-1|}{3}-\dfrac{3(1-|1-2x|)}{2}\le 1-\dfrac{2|2x-1|-1}{6}\qquad 6.\ \dfrac{2-|3-x|}{2}-\dfrac{1-|12-4x|}{3}\ge\dfrac{9-|x-3|}{4}$

4.3 Να λύσετε την ανίσωση: $3\le|1-2x|\le 5$ και να γράψετε το αποτέλεσμα σε μορφή ένωσης διαστημάτων.

4.4 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$\alpha.\ \dfrac{2+|2x+1|}{5}-\dfrac{1-|4x+2|}{10}\le\dfrac{|2x+1|}{2}\qquad \beta.\ \dfrac{|2x-4|-3}{4}-\dfrac{1-|6-3x|}{3}\le\dfrac{1}{2}-\dfrac{|x-2|}{6}$

$\left(\text{Απαντήσεις}:\ \alpha.\ x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)\quad \beta.\ x\in\left[\dfrac{21}{20},\dfrac{59}{20}\right]\right)$

$\gamma.\ 1\le|x+3|\le 4\qquad \delta.\ 3<|1-2x|<4\qquad \varepsilon.\ |3|x-1|-2|\le 10$

$\left(\gamma.\ x\in[-7,-4]\cup[-2,1]\quad \delta.\ x\in\left[-\dfrac{3}{2},-1\right]\cup\left[2,\dfrac{5}{2}\right]\quad \varepsilon.\ x\in[-3,5]\right)$

4.5 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

$\alpha.\ 2x^2-5x+3<0 \quad \left(x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)\right) \quad \beta.\ 2x^2-5x+3\geq 0 \quad \left(x\in(-\infty,1]\cup[1,5,+\infty)\right)$

$\gamma.\ 4x^2+4x+1<0 \quad (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta) \quad \delta.\ 4x^2+4x+1>0 \quad \left(\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$

$\varepsilon.\ 9-4x^2\geq 0 \quad \left(x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]\right) \quad \sigma\tau.\ x^2-16<0 \quad \left(x\in(-4,4)\right)$

$\zeta.\ -x^2+3x-2\leq 0 \quad \left(x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)\right) \quad \eta.\ x^2-7x+10>0 \quad \left(x\in(-\infty,2)\cup(5,+\infty)\right)$

$\theta.\ x^2+4<0 \quad (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta) \quad \iota.\ 2x^2+5>0 \quad (\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R})$

$\iota\alpha.\ -3x^2+6x-3\geq 0 \quad (x=1) \quad \iota\beta.\ 2x^2-12x+18\geq 0 \quad (\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R})$

$\iota\gamma.\ x^2-2x+5\geq 0 \quad (\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \forall x\in\mathbb{R}) \quad \iota\delta.\ x^2+x+1\leq 0 \quad (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta)$

$\iota\varepsilon.\ x^2+2x-3\leq 0 \quad \left(x\in[-3,1]\right) \quad \iota\sigma\tau.\ 3x-9x^2\leq 0 \quad \left(x\in(-\infty,0]\cup[\frac{1}{3},+\infty)\right)$

$\iota\zeta.\ 3x^2-12x>0 \quad \left(x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\right) \quad \iota\eta.\ x^2+x<0 \quad \left(x\in(-1,0)\right)$

$\iota\theta.\ x-4x^2\geq 0 \quad \left(x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\right) \quad \kappa.\ 4x^2-5x<0 \quad \left(x\in\left(0,\frac{5}{4}\right)\right)$

4.6 Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α, ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

$\alpha.\ x^2-(2a+3)x+1>0 \quad \beta.\ ax^2-3x+a<0 \quad \gamma.\ x^2-(3a-1)x+(a+1)^2\geq 0$

$\left(\alpha.\ a\in\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad \beta.\ a\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \quad \gamma.\ a\in\left[-\frac{1}{5},3\right]\right)$

4.7 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$\alpha.\ x^2-3|x|-4\leq 0 \quad \beta.\ (x-1)^2+4|x-1|-12<0 \quad \gamma.\ (x+2)^2-3|x+2|+2\leq 0$

5. ΠΡΟΟΔΟΙ

5.1 Δίνεται η ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_\nu=7-4\nu$. Να αποδείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

5.2 Αν σε μια αριθμητική πρόοδο, η διαφορά του 7ου από τον 15ο όρο της είναι ίση με 40, να βρείτε τη διαφορά του 20ου από τον 32ο όρο της.

5.3 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

a. $2+5+8+...+302$ ***b.*** $-3-7-11-...-203$

5.4 Αν σε αριθμητική πρόοδο ο 12ος όρος της ισούται με 31 και ο 23ος όρος της με -13, να βρείτε το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της.

5.5 Αν σε αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της είναι 300, ενώ το άθροισμα των 16 πρώτων όρων της είναι 528, να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

της.

5.6 Να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 2, 5, 8,… που απαιτούνται , ώστε το άθροισμά τους να μην ξεπερνάει το 100.

5.7 Έστω η πρόοδος : -20, -16, -12,… . Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος των όρων που απαιτούνται ώστε το άθροισμα τους να είναι θετικός αριθμός.

5.8 Αν σε μια αριθμητική πρόοδο με 2015 όρους, ο μεσαίος είναι ίσος με 4, να βρείτε το άθροισμα των 2015 όρων της.

5.9 Σε μια αριθμητική πρόοδο, ο 1ος όρος της ισούται με –5, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της με 400 και ο ν-οστός όρος της με 55, να βρείτε το πλήθος των όρων της καθώς και την διαφορά της προόδου.

5.10 Σε μια αριθμητική πρόοδο δίνεται ότι: $S_{16}-S_{15}=400$ και $S_8-S_7=24$. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}$.

5.11 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\boldsymbol{a}.\ 1+7+13+...+\boldsymbol{x}=280 \quad \boldsymbol{b}.\ (\boldsymbol{x}+1)+(\boldsymbol{x}+4)+(\boldsymbol{x}+7)+...+(\boldsymbol{x}+28)=155$

5.12 Δίνονται οι ακολουθίες με τύπους: $\boldsymbol{a}_\nu=17-5\boldsymbol{\nu},\ \ \beta_\nu=12-4\boldsymbol{\nu}$. Να βρείτε τον μοναδικό κοινό όρο των δύο ακολουθιών και στη συνέχεια να βρείτε τους μικρότερης τάξης όρους τους που να διαφέρουν κατά 10 μονάδες.

5.13 Σε ένα αμφιθέατρο με 15 σειρές, το πλήθος των καθισμάτων από σειρά σε σειρά διαφέρει κατά σταθερό πλήθος θέσεων. Αν η μεσαία σειρά έχει 33 καθίσματα, να βρείτε το συνολικό πλήθος των θέσεων.

5.14 Δίνονται οι ακολουθίες a_ν, β_ν : -1, 4, 9, 14, … και 5, 9, 13, 17,… . Καθώς παρατηρείτε, είναι $a_3=\beta_2$. Ποιοι είναι οι αμέσως επόμενοι ίσοι όροι τους; Τι άθροισμα έχουν οι 10 πρώτοι ίσοι όροι τους;

5.15 Σε ένα θέατρο, στην πρώτη σειρά υπάρχουν 12 θέσεις ,στη δεύτερη 16 θέσεις, στην τρίτη 20 θέσεις κ.ο.κ . Σε μια παράσταση, στην 1η σειρά υπάρχει μια κενή θέση, στη 2η σειρά 3 κενές, στην 3η σειρά 5 κενές θέσεις κ.ο.κ.. Το θέατρο διαθέτει 16 σειρές καθισμάτων. Να βρείτε πόσοι θεατές παρακολουθούν την παράσταση.

5.16 Μεταξύ των αριθμών 7 και 40 να παρεμβάλλετε 10 όρους έτσι ώστε να φτιάχνουν μαζί με τους 7 και 40 μια αριθμητική πρόοδο.

5.17 Έστω ότι οι αριθμοί α=x-3, β=2x+1 και γ=2x+3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ο α είναι ο 3ος όρος της προόδου αυτής, να υπολογίσετε το άθροισμα: $a_1+a_4+a_7+...+a_{37}$.

5.18 Σε πρόοδο με 1ο όρο 2 και διαφορά ίση με 3, να βρείτε το πλήθος των όρων που πρέπει να πάρουμε από τον 7ο και μετά, ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με 130. Στη συνέχεια να

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

υπολογίσετε το: $a_7+a_8+a_9+\ldots+a_{12}$.

5.19 Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους Α.Π με άθροισμα 0 και γινόμενο 144.

5.20 Να βρείτε το άθροισμα όλων των αριθμών από 1 έως 300 που δεν είναι πολλαπλάσια του 5 ή του 7 .

5.21 Σε πρόοδο για την οποία γνωρίζουμε ότι $a_1=3$ και $\omega=4$, να βρείτε το άθροισμα των όρων της από τον 7° μέχρι και τον 20° και να υπολογίσετε το άθροισμα:
$a_1+a_5+a_9+a_{13}+\ldots+a_{41}$.

5.22 Αν ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας a_ν είναι : $a_\nu = 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu+1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος. Στη συνέχεια να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της.

5.23 Να βρείτε το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της ακολουθίας με τύπο: $a_\nu = 5\cdot 2^{\nu+2}$.

5.24 Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι: $a_4=24$ και $a_7=192$. Να βρείτε το λόγο και τον πρώτο όρο της προόδου και στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα $a_1+a_3+a_5+a_7+\ldots+a_{11}$.

Να βρείτε γεωμετρική πρόοδο σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$i.\ a_4-a_2=24\ \ \kappa\alpha\iota\ \ a_2+a_3=6.$

$ii.\ a_2=a_1+5\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \alpha_2+\alpha_3=2\alpha_1+40.$

$iii.\ a_2\cdot a_6=576\ \ \kappa\alpha\iota\ \ a_3\cdot a_4=288.$

$iv.\ a_1+\alpha_2+\alpha_3=14\ \ \kappa\alpha\iota\ \ a_4+\alpha_5+\alpha_6=112.$

5.25 Να βρεθεί το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της ακολουθίας: $1+\alpha$, $2+2\alpha$, $4+3\alpha$, $8+4\alpha$,… .

5.26 Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς α, β, γ αν γνωρίζετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω , ενώ οι α, β+2, γ+12 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο λ=ω+1.

5.27 Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους γνωρίζουμε ότι α) Είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου β) Αν αυξηθεί ο πρώτος κατά 1, η πρόοδος γίνεται γεωμετρική και γ) αν αυξηθεί ο τρίτος κατά 2, η πρόοδος γίνεται πάλι γεωμετρική.

5.28 Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι 10 και το άθροισμα των δύο τελευταίων είναι 15.

5.29 Δύο πρόοδοι, η πρώτη αριθμητική και η δεύτερη γεωμετρική, έχουν κοινούς τους δύο πρώτους όρους τους. Στην αριθμητική πρόοδο, ο 4ος είναι 10 μονάδες μεγαλύτερος του 2ου ενώ στη γεωμετρική, η διαφορά 4ου και 2ου όρου είναι 30 μονάδες. Να βρείτε τις προόδους.

5.30 Να λυθεί η εξίσωση: $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^x=2^{2004}-1$.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

5.31 Μεταξύ των αριθμών 31 και 496, να παρεμβάλλετε τρεις όρους ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

5.32 Να βρείτε την τιμή του χ ώστε: $3\cdot 3^2\cdot 3^4\cdot 3^8\cdot\ldots\cdot 3^{256}=81^{x-1}$

5.33 Αν γνωρίζετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, να δείξετε ότι και η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu=\alpha_{3\nu-2}$, είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος.

5.34 Ο πρώτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι 24 και οι α_1, α_5, α_{11} αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε τη διαφορά της αριθμητικής και το λόγο της γεωμετρικής προόδου.

5.35 Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι: $\boldsymbol{S}_3=168\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5+\boldsymbol{a}_6=21.$ Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

5.36 Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζετε ότι το γινόμενό τους είναι 729 και ο τέταρτος ισούται με το γινόμενο των δύο μεσαίων όρων.

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6.1 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x^2+x},\quad g(x)=\frac{x-2}{x^2+|x|-2},\quad h(x)=\sqrt{2-|x|}+\frac{1}{x},\quad s(x)=\frac{\sqrt{|x|-2}}{|x|-3}$$

6.2 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x^2}{x-2}},\quad g(x)=\frac{\sqrt{|x|-x}}{x^2-2x+5},\quad h(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{x^2-10x+9},\quad s(x)=\sqrt{\frac{1+x}{|x|+x}}.$$

6.3 Δίνονται οι συναρτήσεις f(x), g(x) με τύπους:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<-2\\ x^2-1, & x>-2\\ a, & x=-2\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0\\ x-3, & x>0\end{cases}$$

α. Να βρείτε τα: f(-3)+f(5), f(0)+g(0), f(2)-g(4).
β. Να υπολογίσετε το α, αν f(-2)+g(3)=20.
γ. Να γράψετε την παράσταση: $f(x^2)+g(x^2+1)$.

6.4 . Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

2. Να υπολογίσετε σαν συνάρτηση του χ τις ποσότητες f(2x), f(1-x).
3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f(2x), f(1-x).
4. Να υπολογίσετε σαν συνάρτηση του χ την ποσότητα: $f(\frac{2x-1}{x+3})$.
5. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(f(\frac{2x-1}{x+3})\right)^2 - f(\frac{2x-1}{x+3}) - 6 = 0.$

6.5 Να βρείτε – αν υπάρχουν - τα σημεία τομής με τους άξονες των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2x\sqrt{x-2}$ 2. $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ 3. $h(x) = x^3 - x^2 - 2x$ 4. $k(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{|x|-2}}$

5. $l(x) = \frac{2}{x-|x|}$ 6. $m(x) = \frac{x^2-5}{x^2+2}$

6.6 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x) = x^2 - 7x + 6$ και $g(x) = 2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}.$

α. Να βρείτε – αν υπάρχουν – σημεία τομής τους.

β. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

6.7 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ και $g(x) = x^2 - 4x + 2,\ x \in \mathbb{R}.$

α. Να βρείτε – αν υπάρχουν – σημεία τομής τους.

β. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

6.8 Να ελέγξετε αν κάποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, έχουν άξονα συμμετρίας τον xx΄ ή τον yy΄.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ 2. $g(x) = x^2 - 4x^4 + 2$ 3. $h(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

4. $l(x) = \frac{2x^3}{|x|+3}$ 5. $m(x) = |x-2| + |x+2|$ 6. $k(x) = \frac{1-x}{x}$

7. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

7.1 Έστω α, β ρίζες της εξίσωσης : $x^2-3x-2=0$.

1. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων: $A=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ και $B=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$.
2. Να γράψετε την δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει ρίζες τους A, B.
3. Να γράψετε την δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τους 2α+3, 2β+3.

7.2 Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση: $x^2 - (2a+k)x + 3a = 0.$ Γνωρίζουμε ότι οι ρίζες της είναι το (-1) και το 2.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

1. Να δείξετε ότι $9a+12k=22$.
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $9x^2-15x-14=0$ έχει ρίζες τους α και k.
3. Να δείξετε ότι: $81a^2k+108ak^2+308=0$.

7.3 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(2\lambda+1)x+\lambda^2=0$.

1. Να περιορίσετε κατάλληλα τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε να έχει δύο άνισες ρίζες.
2. Να περιορίσετε κατάλληλα τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε να έχει δύο θετικές ρίζες.
3. Να βρείτε – αν υπάρχει – τιμή του λ ώστε να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

7.4 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(a+3\beta)x-2a=0$.

1. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της και ισχύει η σχέση: $2x_1+x_2(2+x_1)=12$, να βρείτε τον αριθμό β.
2. Για την τιμή του β που βρήκατε, να υπολογίσετε την διακρίνουσα της αρχικής εξίσωσης σαν συνάρτηση του α.
3. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.
4. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του α που βρήκατε να λύσετε την αρχική εξίσωση.

7.5 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(a+2)x+a=0,\ a\in\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό α.
2. Αν το γινόμενο των ριζών του είναι 6, να βρείτε τον α.
3. Για την τιμή του α που προσδιορίσατε, να λύσετε την εξίσωση.

7.6 Έστω δύο τριώνυμα Τ1 και Τ2 με διακρίνουσες Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει η σχέση: $\Delta_1^2+\Delta_2^2+6\Delta_2-4\Delta_1+13\le 0$.

1. Να δείξετε ότι το Τ1 έχει δύο άνισες ρίζες, ενώ το Τ2 καμία.
2. Αν για τα Τ1, Τ2 γνωρίζουμε ότι έχουν ίσα τα α και β με α=3, β=-2 να βρείτε τις ρίζες του Τ1.
3. Να βρείτε τους τύπους των δύο τριωνύμων.

7.7 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(a+1)x-a-4=0,\quad a\in\Re$.

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του α.
2. Να βρείτε σε ποιο διάστημα πραγματικών αριθμών πρέπει να ανήκει ο α, ώστε η εξίσωση να έχει δύο αρνητικές ρίζες.
3. Αν το α πάρει τη μεγαλύτερη ακέραια τιμή του διαστήματος που προσδιορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την ανίσωση: $x^2-ax+(a+5)^{2004}\le 0$.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

7.8 Έστω η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=x^2-ax+a-1, \quad a\in\Re.$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα της ως συνάρτηση του α.
2. Να αποδείξετε ότι έχει δύο ρίζες για κάθε τιμή του α.
3. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο άνισες ρίζες, να λυθεί η εξίσωση: $(a-2)(a^2-a-2)=0.$

7.9 Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2+\lambda\right)x^2+2\left(\lambda^2-1\right)x+\lambda^2-\lambda=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$

α. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι πρώτου και για ποιες δεύτερου βαθμού;

β. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες, καθώς και τις ρίζες αυτές.

γ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες ετερόσημες ρίζες.

δ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο αρνητικές ρίζες.

ε. Να βρείτε το λ ώστε το πρώτο μέλος της εξίσωσης να παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

στ. Βρείτε – αν υπάρχουν – τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο αντίθετες ρίζες.

7.10 Να λύσετε την ανίσωση: $\left(x-2\right)^2-3\left|x-2\right|+2\le 0$

7.11 Δ ίνεται η εξίσωση: $x^2-\left(\lambda+3\right)x+\lambda+4=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της ισούται με 13. Να βρείτε τις ρίζες και το λ , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι οι δύο ρίζες της είναι θετικές.

7.12 Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda-2\right)x^2-\lambda x+2=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για κάθε $\lambda\neq 2$

β. Αν ρ_1 και ρ_2 (όπου η ρ_2 εξαρτάται από το λ) είναι οι ρίζες της, να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $\dfrac{4}{\rho_2^2}+\dfrac{2}{\rho_1\rho_2}\le 2$

7.13 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\left(\lambda-3\right)x-\left(\lambda+3\right)=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$

Να βρείτε το λ και τις δύο ρίζες της, αν γνωρίζετε ότι η μία ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

7.14 Δίνεται η εξίσωση: $x^2+\left(3\lambda-2\right)x+\left(\lambda-4\right)^2=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$

α. Να εκφράσετε τη διακρίνουσα ως συνάρτηση του λ και να τη φέρετε σε μορφή γινομένου πρωτοβάθμιων παραγόντων.

β. Να βρείτε για ποιες αρνητικές ακέραιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο θετικές ρίζες.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

δ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

ε. Αν η αρχική εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες, να δείξετε ότι η εξίσωση:

$x^2+(\mu+\lambda^2+4\lambda-12)x+\mu-1=0,\ \ \mu\in\mathbb{R}$ έχει επίσης πραγματικές ρίζες.

7.15 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\sqrt{x^2-2ax+a^2}-\sqrt{x^2+2x+1},\quad a>0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το Α(0,1).

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι α=1.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>0$.

γ. Αν $x\in(-1,2)$, να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

δ. Αν $x\in(0,2)$, να λύσετε την ανίσωση: $f\left(\sqrt[3]{x}\right)\geq f\left(\sqrt{x}\right)$.

ε. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=f\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ \ \textit{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}$.

7.16 Σε ένα σχολείο φοιτούν 200 άτομα. Από τους μαθητές, 150 άτομα μιλούν Αγγλικά, 110 άτομα μιλούν Γαλλικά ενώ 60 άτομα μιλούν μόνο Αγγλικά. Διαλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη. Αν επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη, να βρείτε την πιθανότητα:

α) Να μιλά και τις δύο ξένες γλώσσες

β) Να μιλά μια τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες.

γ) Να μη μιλά καμιά από τις δύο ξένες γλώσσες.

δ) Να μιλά ακριβώς μία από τις δύο γλώσσες.

7.17 Δίνεται το τριώνυμο με τύπο: $f(x)=x^2+ax+a,\quad a\in(0,3)$

1. Να δείξετε ότι το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
2. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση : $a\cdot f(x)=(x^2+a)\cdot(a+1)$ να έχει δύο ίσες ρίζες.
3. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η ελάχιστη τιμή του f(x) να είναι τουλάχιστον $\dfrac{3}{4}$.

7.18 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$a_4=-4,\ a_9=-19.$

α) Να δείξετε ότι $a_1=5,\ \omega=-3.$

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με -61.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $5+2-1-4-\ldots-61$

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $a_2+a_5+a_8+\ldots+a_{23}$

ε) Να βρείτε πόσους το πολύ όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε, ώστε το άθροισμά τους να ξεπερνά τον αριθμό (-525) . Δίνεται ότι: $\sqrt{12769}=113$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

7.19 Δίνονται οι αριθμοί: $-4x, 2x^2, 8 \quad \mu\varepsilon \quad x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του χ ώστε να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Αν γνωρίζετε ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω προόδου είναι ο αριθμός (-64), να βρείτε ποιοι όροι είναι οι τρεις που δόθηκαν.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_{26}$

7.20 α) Να βρείτε την τιμή του χ, ώστε οι αριθμοί: $2, x^2, 12 - x^2$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν ο μεσαίος από αυτούς είναι ο 5ος όρος της προόδου, να βρείτε τον 1ο όρο της.

γ) Υπολογίστε το άθροισμα: $a_4 + a_5 + a_6 + ... + a_{10}$

7.21 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2 = -\lambda(x+1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (*)$

1. Να δείξετε ότι η (*) έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε λ.
2. Αν για τις ρίζες $x_1, x_2 \ \tau\eta\varsigma \ (*) \ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 5$, να βρείτε το λ.
3. Να βρείτε την εξίσωση με ρίζες τα $x_1 - 1, \ x_2 - 1$.

7.22 Έστω η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 1$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |2x - 3|$
4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει η σχέση $f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) = 0$

7.23 Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{2|k-2| - 3}{2} - \frac{|k-2|}{12} - \frac{1}{3}$

1. Για τις τιμές του k που επαληθεύουν την εξίσωση A=0, να λυθεί η εξίσωση: $kx^2 - 2kx + k - 9 = 0. \ (1)$
2. Για τις τιμές του κ που επαληθεύουν την ανίσωση A<0, να βρείτε το πλήθος των ριζών της (1) δικαιολογώντας την απάντησή σας.

7.24 Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + 2(a+1)x - (a^2 + 2a + 5) = 0$

1. Να δείξετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε α πραγματικό.
2. Αν γνωρίζετε ότι $|x_1| = |x_2|$, όπου x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης, να υπολογίσετε το α και τις ρίζες της.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

7.25 Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2+\lambda\right)x^2+2\left(\lambda^2-1\right)x+\lambda^2-\lambda=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$

α. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι πρώτου και για ποιες δεύτερου βαθμού;

β. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες, καθώς και τις ρίζες αυτές.

γ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες ετερόσημες ρίζες.

δ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο αρνητικές ρίζες.

ε. Να βρείτε το λ ώστε το πρώτο μέλος της εξίσωσης να παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

στ. Βρείτε – αν υπάρχουν – τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο αντίθετες ρίζες.

7.26 Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\left(\lambda+3\right)x+\lambda+4=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της ισούται με 13.

Α. Να βρείτε τις ρίζες και το λ , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι οι δύο ρίζες της είναι θετικές.

Β. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του λ που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση:

$(2x-1)^2-\lambda\cdot|2x-1|-3\le 0$

7.27 . Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda-2\right)x^2-\lambda x+2=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για κάθε $\lambda\neq 2$

β. Αν ρ_1 και ρ_2 (όπου η ρ_2 εξαρτάται από το λ) είναι οι ρίζες της, να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $\dfrac{4}{\rho_2^2}+\dfrac{2}{\rho_1\rho_2}\le 2$

7.28 Δίνεται η εξίσωση: $x^2+\left(3\lambda-2\right)x+\left(\lambda-4\right)^2=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$

α. Να εκφράσετε τη διακρίνουσα ως συνάρτηση του λ και να τη φέρετε σε μορφή γινομένου πρωτοβάθμιων παραγόντων.

β. Να βρείτε για ποιες αρνητικές ακέραιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο θετικές ρίζες.

δ. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

ε. Αν η αρχική εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες, να δείξετε ότι η εξίσωση:

$x^2+(\mu+\lambda^2+4\lambda-12)x+\mu-1=0,\ \ \mu\in\mathbb{R}$ έχει επίσης πραγματικές ρίζες.

7.29 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2+4x+3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+3}$.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.

γ. Να βρείτε – αν υπάρχουν – σημεία τομής της C_f με την ευθεία με εξίσωση

ΒΑΣΤΑΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

$y=-3x+2$

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $(x+3)f(x)+2x+16f(1)\le 0$

7.30 Δίνονται ο δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, καθώς και τα σύνθετα ενδεχόμενά του Α, Β που περιγράφονται ως εξής:

$\Omega=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\ \text{και}\ x^2-3x-4<0\}$, $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\ \text{και}\ |x-1|<2\}$ και

$B=\{x\,|\,x\ \text{λύση της}\ x^4-8x=0\}$

α. Να βρείτε τα σύνολα Ω, Α και Β.

β. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A, B, $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$.

γ. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα ακριβώς από τα ενδεχόμενα Α,Β καθώς και την πιθανότητα να πραγματοποιείται το Α ή να μην πραγματοποιείται το Β.

7.31 Έστω δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία γνωρίζουμε ότι $A\subseteq B$, καθώς και ότι οι πιθανότητες των δύο ενδεχομένων, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $6x^2-5x+1=0$.

α. Να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(B).

β. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α και Β.

γ. Να βρείτε την εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $P(A'\cap B')$ και $P(A'\cup B')$.

7.32 Δίνονται οι <u>ακέραιοι</u> αριθμοί : $3x+5,\ x+5,\ 2-6x$ οι οποίοι αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου.

α. Να βρείτε το x, τους όρους καθώς και το λόγο της προόδου.

β. Αν χ=-1 και οι όροι $\frac{1}{3x+5},\frac{1}{x+5},\frac{1}{2-6x}$ είναι οι πιθανότητες $P(A), P(A\cap B), P(A\cup B)$ δύο ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, να υπολογίσετε:

i. Τα $P(A), P(A\cap B), P(A\cup B)$ και $P(B)$.

ii. Τις πιθανότητες: $P(A-B), P(A\cup B')$ και $P((A-B)\cup(B-A))$

7.33 Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: $1, P(A), P(B), P(A\cap B), \frac{1}{16},\ldots$

α. Να βρείτε το λόγο της προόδου καθώς και τις πιθανότητες των ενδεχομένων $P(A), P(A\cap B), P(A\cup B)$ και $P(B)$.

β. Να δείξετε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του (Β-Α) είναι επίσης όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

γ. Ανάμεσα στα $P(A)$ και $P(A \cap B)$, να παρεμβάλλετε τρεις όρους, ώστε οι 5 αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

7.34 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+x+2}}{x^2-x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες – αν υπάρχουν.

γ. Αν α, β ρίζες της εξίσωσης: $\left(x^2-x\right)\cdot f^2(x)=1$, να δείξετε ότι αβ+1=0.

7.35 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=x^2-(\beta-a)x+2\beta-a-2, \quad a,\beta\in\mathbb{R}.$

α. Αν τέμνει τον οριζόντιο άξονα στα σημεία Α(2,0) και Β(3,0), να βρείτε τα α και β.

β. i. Για α=-2 και β=3, να βρείτε για ποιες τιμές του χ η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι πάνω από τον χχ΄.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(|x|-1)=6$

7.36 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|x|}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε ότι f(x)=f(-x) για κάθε χ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

γ. Να δείξετε ότι: $f(a)-f(b)=0,$ *όπου* α και b ρίζες της εξίσωσης :

$x^2-k^2=0, \quad k\in[-2,0)\cup(0,2].$

δ. Να βρείτε για ποιες τιμές του χ ορίζεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x)=f(|x|-2)$

7.37 Δίνεται η εξίσωση (ε): $x^2-(a-2)x+1-a=0, \quad a\in\mathbb{R}.$ Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της (ε) και ισχύει ότι : $\rho_2=2\rho_1^2$ τότε:

α. Να δείξετε ότι έχει δύο ρίζες για κάθε α πραγματικό και να τις εκφράσετε σαν συνάρτηση του α.

β. Να υπολογίσετε τα ρ_1,ρ_2 και α.

7.38 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{|x|-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β. Να αποδείξετε ότι f(-x)=f(x) .

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $|f(x)-2|<1$

7.39 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x)=\dfrac{x^2-|x|-2}{x^2-2|x|-3}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της f με την ευθεία με εξίσωση y=2.
δ. Να βρείτε για ποιες τιμές του χ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα ψψ΄.

7.40 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η σχέση:
$(a-3)x^2-5x+a-3\geq 0$, να ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

7.41 Δίνονται τα τριώνυμα :
$T(x)=x^2-(\lambda+3)x+1 \quad \kappa\alpha\iota \quad K(x)=x^2+2\lambda x+\mu, \quad x\in\mathbb{R}.$
α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το Τ(χ) έχει δύο ίσες ρίζες.
β. Να βρείτε τα λ και μ ώστε το Τ(χ) να έχει δύο ίσες ρίζες και το Κ(χ) να έχει δύο άνισες και αντίστροφες ρίζες.
γ. Για λ=-5 και μ=1, να υπολογίσετε τις δύο αντίστροφες ρίζες του Κ(χ).

7.42 Δίνεται ότι : -2<χ<1 καθώς και οι παραστάσεις :
$A=|x+2|-|x-1| \quad \kappa\alpha\iota \quad B=|2-x|-|x+3|$
α. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β.
β. Να λύσετε την εξίσωση Α=Β.
γ. Να αποδείξετε ότι $A\cdot B<0, \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x\neq -\frac{1}{2}.$

8. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ «ΣΩΣΤΟΥ»- «ΛΑΘΟΥΣ»

1. Ισχύει ότι $|x|=|-x|, \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x\in\mathbb{R}.$
2. Ισχύει ότι $|a+\beta|=|a|+|\beta| \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \alpha,\beta\in(0,+\infty).$
3. Ισχύει ότι $|xy|=|x|\cdot|y|$.
4. Δύο ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα αν $A\cap B=\varnothing$
5. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, έχει πάντα πραγματική λύση για ν περιττό.
6. Η τομή δύο ενδεχομένων είναι σύνολο.
7. Ισχύει η σχέση: d(x,y)=d(x-1,y-1)
8. Για θετικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι: d(x,y)=d(x,-y)
9. Ισχύει ότι: |α+β|<|α|+|β| για οποιουσδήποτε πραγματικούς α,β.
10. Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.
11. Η εξίσωση |χ+1|=-2 είναι αδύνατη.
12. Για μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση f, ισχύει ότι:
$$f(|x|)>f(-|x|), \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x\in\mathbb{R}.$$
13. Ισχύει η σχέση: $|x-y|\leq|x|+|y|, \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x,y\in\mathbb{R}.$
14. Αν μια ανίσωση 2ου βαθμού αληθεύει για κάθε χ πραγματικό, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

15. Ένα τριώνυμο για το οποίο ισχύει αγ<0, έχει δύο ετερόσημες ρίζες.

16. Αν η Δ ενός τριωνύμου είναι μηδέν, το τριώνυμο γράφεται σαν τετράγωνο διωνύμου.

17. Αν σε ένα τριώνυμο ισχύει $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, τότε έχει δύο άνισες ρίζες.

18. Ένα σύστημα μιας πρωτοβάθμιας με μια δευτεροβάθμια εξίσωσης, μπορεί να έχει από καμία έως τέσσερις λύσεις.

19. Η σχέση $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ αληθεύει και στην περίπτωση που Δ=0.

20. Η ισότητα $|\alpha+\beta|=||\alpha|-|\beta||$, ισχύει μόνο αν α=0 ή β=0.

21. Αν -1<χ<0, η παράσταση Α=|-χ|+|1+χ| είναι ανεξάρτητη του χ.

22. Η σχέση $|x^2+9| = x^2+9$, αληθεύει μόνο αν $-3 < x < 3$.

23. Η ισότητα $|x-2| = 2-x$, είναι αληθής μόνο αν χ>2.

24. Δύο τριώνυμα που έχουν τις ίδιες άνισες ρίζες, ταυτίζονται.

25. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι ή γνήσια φθίνουσα ή γνήσια αύξουσα.

26. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα τότε ισχύει η σχέση:
$f(x^2+1) > f(2x),\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in \mathbb{R} - \{1\}$

27. Η εξίσωση $x^{2015} = a,\ a < 0$, είναι αδύνατη.

28. Η εξίσωση $x^{2016} = a,\ a > 0$,έχει πάντοτε μία λύση.

29. Η ποσότητα $\sqrt{a^2x^4}$ είναι ίση με την $\sqrt[3]{a^3x^6}$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α και x.

30. Αν |χ|<1, τότε $\sqrt{x^2-2x+1} = x-1$.

31. Μια δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να έχει το πολύ δύο ρίζες.

32. Ισχύει η σχέση: $|x| = \sqrt[4]{x^4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

33. Μια δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να έχει δύο ίσες και αντίστροφες ρίζες.

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

34. Αν α, β ετερόσημοι αριθμοί, ισχύει ότι $|\alpha+\beta|=||\alpha|-|\beta||$

35. Αν α, β ομόσημοι , ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

36. Αν α, β ομόσημοι , ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

37. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει αντίθετες ρίζες, τότε β=0.

38. Ένα τριώνυμο με Δ<0 παίρνει μόνο αρνητικές τιμές.

39. Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει πάντα $\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu-1}=2\alpha_{\nu}$

40. Η διαφορά μιας αριθμητικής προόδου πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός.

41. Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει β-α=γ-α.

42. Σε κάθε πρόοδο ισχύει η ισότητα $S_{\nu+1}-S_{\nu}=\alpha_{\nu+1}$

43. Αν η (α_{ν}) είναι αριθμητική πρόοδος, τότε και η (β_{ν}) με $\beta_{\nu}=\alpha_{\nu}-2$ είναι επίσης αριθμητική πρόοδος.

44. Αν η (α_{ν}) είναι αριθμητική πρόοδος, τότε και η (β_{ν}) με $\beta_{\nu}=-2\alpha_{\nu}$ είναι επίσης αριθμητική πρόοδος.

45. Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει πάντα η σχέση: $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_{\nu}} = \frac{\alpha_{2015}}{\alpha_{2013}}$

46. Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύει πάντα η σχέση: $\alpha_{\nu} + \alpha_{2015} = \alpha_{\nu+2} + \alpha_{2013}$

47. Αν Α, Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, ισχύει ότι: $P(A-B) = P(A)$

48. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δ.χ Ω, ισχύει ότι $P(A \cup B) \le P(A \cap B)$

49. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δ.χ Ω, ισχύει ότι $P(A-B) \le P(A)$

50. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δ.χ Ω, ισχύει ότι
$P(A)+P(B)-1 \le P(A \cap B)$

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΩΣΤΑ-ΛΑΘΟΣ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ

9.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Τι είναι δειγματικός χώρος; Τι ονομάζουμε ενδεχόμενο; Ποιο ενδεχόμενο χαρακτηρίζεται ως βέβαιο και ποιο ως αδύνατο; (21,22)

2. Πότε δύο ενδεχόμενα χαρακτηρίζονται ασυμβίβαστα και πότε συμπληρωματικά; Είναι τα ασυμβίβαστα συμπληρωματικά; Είναι τα συμπληρωματικά ασυμβίβαστα; (23)

3. Να παραστήσετε με τη βοήθεια διαγραμμάτων τα:

$A \cup B,\ A \cap B,\ A - B,\ (A \cup B)',\ A' \cup B'$. Στη συνέχεια να διατυπώσετε σε κοινή γλώσσα τις αντίστοιχες πράξεις. (22,23,24)

4. Να δώσετε τον ορισμό της πιθανότητας, για ισοπίθανα ενδεχόμενα (32)

6. Να αποδείξετε ότι: $P(A') = 1 - P(A)$ (33)

7. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον προσθετικό νόμο για τις πιθανότητες (33)

8. Να αποδείξετε ότι: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ (33)

9. Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq B \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad P(A) \le P(B)$ (34)

10. Τι έχουμε δικαίωμα να κάνουμε στα δύο μέλη μιας ανίσωσης; Τι πράξεις επιτρέπεται να κάνουμε μεταξύ δύο ομόρροπων ανισώσεων; (55)

ΒΑΣΙΛΗΣ Μ. ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

11. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού. Να δικαιολογήσετε ότι: $|\alpha|^2=\alpha^2$. (61,62)

12. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$. Ισχύει για περισσότερους από δύο παράγοντες; (62)

13. Να αποδείξετε ότι: $|a+\beta|\leq|a|+|\beta|$ (62,63)

14. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ανισώσεις παραλείποντας τις απόλυτες τιμές:
$|x-x_o|<p\Leftrightarrow$ $|x-x_o|>p\Leftrightarrow$

15. Πως ορίζεται η τετραγωνική και πως η ν-οστή ρίζα ενός πραγματικού αριθμού α; (69,70)

16. Να αποδείξετε την παρακάτω ιδιότητα πραγματικών αριθμών:
$\sqrt[\nu]{a}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{a\cdot\beta}$. Επεκτείνεται και για περισσότερους από δύο όρους; (71)

17. Να αναφέρετε και όποιες άλλες ιδιότητες ριζών γνωρίζετε. Η ισότητα $\sqrt[\nu]{a^k}=a^{\frac{k}{\nu}}$ με ποιες προϋποθέσεις για τους α, ν, k ισχύει; (72)

18. Να διερευνήσετε την εξίσωση: $\alpha x=\beta$ (79)

19. Να διερευνήσετε την εξίσωση: $x^\nu=a$ (86)

20. Να διερευνήσετε την εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0,\quad a\neq 0$ (89)

21. Να αποδείξετε τους τύπους που δίνουν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου. Να δείξετε πως αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι s και το γινόμενο p , οι αριθμοί είναι ρίζες του τριωνύμου $x^2-sx+p=0$ (90)

22. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματα από τη μελέτη για το πρόσημο τριωνύμου (πινακάκι σελ.109)

23. Να δώσετε τον ορισμό της αριθμητικής προόδου και να αποδείξετε ότι:
$a_\nu=a_1+(\nu-1)\cdot\omega$ (126)

24. Να αποδείξετε ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $2\beta=\alpha+\gamma$. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου (127)

25. Να δώσετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου και να αποδείξετε ότι:
$\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$ (133)

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

26. Να αποδείξετε ότι τρεις μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$. (134)

27. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda \neq 1$. (134)

28. Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης. Τι ονομάζουμε πεδίο ορισμού και τι σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f ; (146 και 148)

29. Ποιες συντεταγμένες έχουν τα συμμετρικά ενός σημείου Μ(α, β) ως προς τον χχ΄ , τον ψψ΄ και το σημείο Ο(0,0) αντίστοιχα; (153,154)

30. Πώς βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους άξονες; Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων;

31. Τι ονομάζουμε κλίση μιας ευθείας; Τι τιμές παίρνει; Για ποιες ευθείες δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης; (159,160)

32. Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες; Πότε δύο ευθείες τέμνουν τον ψψ΄ στο ίδιο σημείο; (162).

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ