ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (5° του 2014)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β]; Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο x_0 ;

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε ισχύει
$\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx$, για κάθε λ πραγματικό αριθμό.

β. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο , ο συζυγής του ανήκει επίσης σε κύκλο ίσης ακτίνας.

γ. Μια συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

δ. Αν για τις συνεχείς στο R συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $f(x) \geq g(x)$,τότε ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx > 0$ για κάθε α<β

ε. Αν η σύνθεση δύο συναρτήσεων ορίζεται στο R, τότε τα πεδία ορισμού τους είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
$|z|^2 - z(4+3i) = \bar{z}(4-3i)$ και $z-(w-1) = 2(1-i)$

Β1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,-3) και ακτίνα $R = 5$.

Β2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών w και να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού
$a = \dfrac{w^2 - 3w + wi}{2iw^2 - 6iw - 2w}$.

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση w=z έχει δύο ακριβώς μη πραγματικές ρίζες.

Β4. Αν οι z και w κινούνται πάνω στους γεωμετρικούς τόπους των ερωτημάτων Β1 και Β2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $|z-\bar{w}| \leq \sqrt{17}+10$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$K(x) = x-1-\ln x,\ x>0$ και $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$ για $x>0$ και $x \neq 1$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η Κ(x) παίρνει μη αρνητικές τιμές και να υπολογίσετε το f(1).

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f(x)=2015 και να δείξετε ότι είναι κοίλη.

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x-1}{2} < \dfrac{\int_1^x (t-1)f(t)dt}{\int_1^x f(t)dt}$ για κάθε $x > 1$.

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση: $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt \geq \int_{x^3+3}^{x^3+4} f(t)dt$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση :
$f'(x)+x = f(x)+1$ για κάθε πραγματικό αριθμό χ, καθώς και η συνάρτηση G για την οποία γνωρίζουμε ότι $G(x) = \int_0^x e^{-t}(1-t)dt$, ενώ η εφαπτομένη της C_f στο 0, τέμνει τον yy΄ στο 1.

Δ1. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης G(x) χωρίς το ολοκλήρωμα και να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + x$.

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α, $\alpha \in (-1,0)$, τέτοιος ώστε f(x)<0 για κάθε x<α και f(x)>0 για κάθε x>α.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο α, περνά από το σημείο Β(-1, α^2-1).

Δ4. i. Να δικαιολογήσετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και να δείξετε ότι δεν τέμνει την γραφική παράσταση της f.

ii. Γνωρίζοντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, τον άξονα χχ΄καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=1+e .

Α1	Α2	Α3	Β1	Β2	Β3	Β4	Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4
9	3+3	10	6	9	5	5	5	8	7	5	7	7	4	2+5