ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Για το θέμα Α τα ξέρετε.

Β1. Επειδή $P(A\cap B)\subseteq P(A)\subseteq P(A\cup B)$, και $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$, και οι ρίζες της εξίσωσης είναι τα $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ προκύπτουν τα ζητούμενα.

Β2. $P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-[P(A\cup B)']=1-P(A)-1+P(A\cup B)=$
$P(A\cup B)-P(A)=\frac{1}{6}$. Ισχύει επίσης ότι : $P(A\cup B)-P(A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B-A)$
$P(\Delta)=P\left[\left(A\cap B\right)'\right]=1-P\left(A\cap B\right)=\frac{3}{4}$

Β3. $P(E)=P\left[\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)\right]=P\left(A\cup B\right)-P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Β4. Επειδή $P(B)+P(\Gamma)=\frac{13}{12}>1$, δεν είναι ασυμβίβαστα.

Γ1. $f_1\%=10$, $f_5\%=30$ από την εκφώνηση. $f_3\%=\frac{108^\circ}{360^\circ}\cdot 100=30\%$. Από τη σχέση της μέσης τιμής έχουμε : $\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot f_i=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i f_i\%}{100}=\frac{9\cdot 10+11\cdot f_2\%+13\cdot 30+15\cdot\left(30-f_2\%\right)+17\cdot 30}{100}$
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f_2\%=10\%,\ f_4\%=20\%.$

Γ2. $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i\%}{100}=\frac{25\cdot 10+9\cdot 10+30+20+9\cdot 30}{100}=6,6\Leftrightarrow s=\sqrt{6,6}=2,57$, άρα
$CV=\frac{2,57}{14}>\frac{1}{10}$

Γ3. $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i v_i+x_5 v_5}{v}\Leftrightarrow 14v=1780+17\cdot 0,3\cdot v\Leftrightarrow v=200$

Γ4. Επειδή $\beta_i=\frac{1}{S_\alpha}\alpha_i-\frac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha}$, και η μέση τιμή επηρεάζεται από τον πολ / μο και την πρόσθεση ενώ η τυπική απόκλιση μόνο από τον πολ / μό, είναι $\bar{\beta}=\frac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha}-\frac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha}=0$ ενώ $S_\beta=\frac{1}{S_\alpha}\cdot S_\alpha=1.$

Δ1. Με Πυθαγόρειο είναι $AΔ^2 = BΔ^2 - x^2 \Leftrightarrow AΔ = \sqrt{100 - x^2}$, άρα $E = AΔ \cdot AB$ συνεπώς $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$.

Δ2. $f'(x) = ... = \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$. Ο αριθμητής έχει δεκτή ρίζα ίση με $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, 5\sqrt{2}]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[5\sqrt{2}, +\infty)$. Συνεπώς έχει μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$, οπότε $AΔ = \sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}$, δηλαδή το σχήμα είναι τετράγωνο.

Δ3. Υπάρχουν τρεις τρόποι να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-\sqrt{99}}{98x} = \frac{1}{98}\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x} = \frac{1}{98}\cdot f'(1) = \frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}$$ ή αλλιώς :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-\sqrt{99}}{98x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}}{98x}\cdot\frac{(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}}{(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2\left[100-(x+1)^2\right]-99}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}\right]} = ... = \lim_{x\to 0}\frac{x\left[-2-x+(2+x)\left(99-2x-x^2\right)\right]}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}\right]} = \frac{1}{\sqrt{99}}$$

ή ακόμα και θέτωντας $y = x+1$ στο αρχικό όριο ή με DLH!

Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,1)$ και αφού $P(A-B) \le P(A)$ είναι :

$$f\left(P(A-B)\right) \le f(P(A)) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

Για να ισχύει η τελευταία ανίσωση, πρέπει να δικαιολογήσετε ότι οι ποσότητες $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}$ και $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$ είναι μεταξύ 0 και 1. Αυτό γίνεται με δύο τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους. Ας πούμε, $0 < P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 > -P^2(A) \ge -1 \Leftrightarrow 100 > 100 - P^2(A) \ge 99 \Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{10} > \dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{99}}$ και πολ / με κατά μέλη με $1 \ge P(A-B) > 0$, οπότε προκύπτει ή παίρνουμε την ανίσωση $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le 1$, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο κ.λ.π