ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΕ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ και ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε τους τύπους που δίνουν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου.

Α2. Αν ένα τριώνυμο έχει δύο αρνητικές ρίζες, τι μπορείτε να πείτε για τα Δ , s και p ;

Α3. Χαρακτηρίστε ως «Σωστά» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Κάθε τριώνυμο με $p<0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες

β. Είναι δυνατόν ένα τριώνυμο με διπλή ρίζα, να έχει $p<0$.

γ. Η εξίσωση $x^2 - a = 0$, με $a > 0$ έχει δύο αντίθετες ρίζες.

δ. Αν s είναι το άθροισμα και p το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου με $\Delta>0$, ισχύει πάντα η σχέση:

$$d\left(\frac{s}{p},0\right) = d\left(\frac{1}{p},\frac{1+s}{p}\right)$$

ε. Η ανίσωση $ax^2 + bx + c > 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta < 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 5x - 4 = 0$ και ονομάζουμε x_1 ,x_2 τις ρίζες της.

Β1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $P = x_1^3 + x_2^3$

Β2. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 2\left(x_1 + x_2 - x_1x_2\right)|x| + x_1x_2 = 0$

Β3. Να γράψετε την εξίσωση του τριωνύμου με ρίζες τα x_1^2, x_2^2

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τριώνυμο $T1: x^2 - 2x - a^2 + 2a$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση T1=0 έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε α πραγματικό.

Γ2. Να βρείτε τις ρίζες x_1 ,x_2 της εξίσωσης T1=0 ως συνάρτηση του α.

Γ3. Αν γνωρίζετε ότι η ανίσωση $T1 \leq 0$, ισχύει όταν $x \in [-3, a^2 - 20]$, να βρείτε την τιμή του α.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (3a+1)x + (a+2)^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες ρίζες.

Δ2. Να βρείτε το α ώστε η ανίσωση $x^2 - (3a+1)x + (a+2)^2 \geq 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση $(x-2)^2 - \left(3a+1\right)|x-2| + \left(a+2\right)^2 = 0$ να έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ

Α1	Α2	Α3	Β1	Β2	Β3	Γ1	Γ2	Γ3	Δ1	Δ2	Δ3
10	5	10	9	9	7	7	6	12	8	8	9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α3: Σ-Λ-Σ-Σ-Λ

Β1 : $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3ps = -185$ Β2 : Θέτεις $y = |x|$, οπότε η εξίσωση γράφεται $y^2 + y - 2 = 0$ με δεκτή την τιμή $y = 1$, οπότε $x = \pm 1$.
Β3 : $x^2 - 33x + 16 = 0$

Γ1 : Είναι $\Delta = 4(a-1)^2 \geq 0$ Γ2 : $x_1 = a$, $x_2 = 2 - a$ Γ3 : Τα άκρα του διαστήματος είναι οι ρίζες της εξίσωσης, οπότε τελικά δεκτή η τιμή $a = 5$

Δ1 : Ζητώ $\Delta > 0 \Leftrightarrow 5(\alpha - 3)(\alpha + 1) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
Δ2 : Αρκεί $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [-1, 3]$
Δ3 : Θέτω $y = |x - 2|$. Για να έχει 4 λύσεις, πρέπει η δευτεροβάθμια να έχει 2 θετικές ρίζες, συνεπώς $\Delta \geq 0$, $s > 0$, $p > 0$ και τελικά συναληθεύουν όταν $\alpha \in [3, +\infty]$