ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ (ΦΕΒ 2015)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»:

α. Αν μια συνάρτηση f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο x_0 , τότε είναι οπωσδήποτε παραγωγίσιμη στο x_0 .

β. Κάθε σημείο στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή, είναι απαραίτητα σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής.

γ. Αν για μια συνάρτηση εφαρμόζεται το θεώρημα Fermat στο σημείο α, η εφαπτομένη της f στο α είναι οριζόντια ευθεία.

δ. Μια συνάρτηση η οποία έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0, δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή.

ε. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [α, β] , δεν μπορεί να έχει κανενός είδους ασύμπτωτες.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο 0 και περιττή στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu 2x + x}{\eta\mu 25x + 11x}$, καθώς και η συνάρτηση με τύπο $g(x) = k \cdot \ln x,\ \ k \in \mathbb{R}^*$.

Β1. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο 0, έστω (ε).

Β2. Να βρείτε το k ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται και της συνάρτησης g(x), και να προσδιορίσετε και το σημείο επαφής τους.

Β3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(7x) - f(-5x)}{x}$.

ΘΕΜΑ Γ

Αν για μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ισχύουν οι σχέσεις: $f(f'(x)) + f(x) = 0,\ \ f'(x) > 0,\ \ f(1) = 0,$ τότε:

Γ1. Να υπολογίσετε το $f'(1)$ και να δείξετε ότι: $f'(f'(x)) = x$

Γ2. Να αποδείξετε ότι f(x)=lnx.

Γ3. Να προσδιορίσετε τις τιμές του k, ώστε η συνάρτηση f να έχει δύο ακριβώς κοινά σημεία με την ευθεία με εξίσωση y=x+k.

Γ4. Αν ονομάσουμε α και β τα σημεία τομής της συνάρτησης f με την παραπάνω

ευθεία και με δεδομένο ότι k<-1, να δείξετε ότι υπάρχει ξ που ανήκει στο (α, β) τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση: $\alpha\beta\left(\ln\xi - 1\right) = k\xi^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο διάστημα $\left(0,+\infty\right)$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)},\ g'(x) > 0,\ g^2(x) = g'(x),\ f(1) = 2 \text{ και } g(2) = -\frac{1}{2}.$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της g(x) και να αποδείξετε ότι:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)' f(x)$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ και να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{g(x)}}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2e^{x-1}}{f'(x)-1} + \frac{2\ln x + 3}{g'(x)+1} = 0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα (1,e).

Βαθμολόγηση υποερωτημάτων:

Α1	Α2	Α3	Β1	Β2	Β3	Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Δ1	Δ2	Δ3
9	6	10	7	8	10	2+2	7	7	7	2+6	4+4	9

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Α3: Σ-Σ-Σ-Λ-Σ

Β1. $f'(0)=\frac{1}{12}$, $y=\frac{1}{12}x$ Β2. Ζητάμε $g'(x_o)=\frac{1}{12}$ και $-\frac{x_o}{12}+k\ln x_o=0$, $x_o=e$, $k=\frac{e}{12}$

Β3. Πάμε με τον ορισμό προσθαφαιρώντας το $f(0)$, βρίσκουμε αποτέλεσμα 1.

Γ1. Θέτουμε όπου χ το 1 στη δοσμένη σχέση και στη συνέχεια, επίσης στη δοσμένη σχέση θέτουμε όπου χ το $f'(χ)$ και προκύπτει το ζητούμενο, αφού η f είναι 1-1.

Γ2. Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση και αντικαθιστούμε το $f'(f'(x))$ με x , οπότε οδηγούμαστε στην ισότητα $xf''(x)+f'(x)=0$, δηλαδή $(xf'(x))'=0$ και τελικά $f(x)=\ln x$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$g(x)=\ln x-x-k$ και βρίσκουμε μονοτονία και σύνολο τιμών το $(-\infty,-1-k]$. Για να έχει δύο ρίζες, απαιτούμε $k<-1$.

Γ4. Κάνουμε θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση με τύπο:

$h(x)=a\beta(\ln x-1)-kx^2$ στο $[\alpha,\beta]$ χρησιμοποιώντας ότι $\ln a=a+k$, $\ln\beta=\beta+k$.

Δ1. Βρίσκουμε ότι

$g(x)=-\frac{1}{x}$ και αντικαθιστώντας στη δοσμένη προκύπτει η ζητούμενη σχέση. Προσοχή οι πράξεις έχουν κάποια δυσκολία.

Δ2. Η σχέση του Δ1, μετασχηματίζεται σε :

$$\left(\frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=c,\ c=1$$ και το όριο αντικαθιστώντας γίνεται :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\ldots=e.$$

Δ3. Αντικαθιστούμε τα $f'(χ)$ και $g'(χ)$, κάνουμε θεώρημα Bolzano για την

$h(x)=2e^{x-1}-2\ln x-3$ και δείχνουμε ότι $h(x)$ γνήσια αύξουσα.