

Θ1. Βασικοί κανόνες πρόσθεσης και πο/σμού ρητών αριθμών

Ομόσημοι: Οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ετερόσημοι: Οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Απόλυτη τιμή ενός αριθμού, ονομάζουμε την απόστασή του στον άξονα από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού, είναι πάντα θετικός αριθμός με εξαίρεση το $|0|=0$.

Για να προσθέσω δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα κρατάω το ίδιο πρόσημο με τους αριθμούς.

$$5 + 7 = 12, (-3) + (-2) = -5, (-4) + (-3) = -7, 8 + 5 = 13$$

Για να προσθέσω δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρώ τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα κρατάω το πρόσημο εκείνου που είχε τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$7 + (-5) = 2, 8 + (-11) = -3, (-7) + 4 = -3, -6 + 10 = 4, -9 + 6 = -3$$

Σειρά σας τώρα:

$$\begin{array}{llll} (-7) + (-3) = & (-6) + (+5) = & (+7) + (+4) = & -5 + 12 = \\ 7 + (-9) = & 10 + (-12) = & 8 + (-4) = & -10 + 9 = \\ -5 + (-3) = & -8 + (-4) = & 5 + (+11) = & -2 + (-4) = \end{array}$$

Αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντίθετου, δηλαδή, αν έχουμε να κάνουμε την πράξη $a-b$, τη μετατρέπουμε σε πρόσθεση: $a+(-b)$.

Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\begin{array}{ll} (-7) - (-3) = (-7) + (+3) = -4 & (-6) - (+5) = (-6) + (-5) = -11 \\ 10 - (-12) = 10 + (+12) = 22 & 8 - (-4) = 8 + (+4) = 12 \\ -8 - (+3) = -8 + (-3) = -11 & -10 - (-4) = -10 + (+4) = -6 \end{array}$$

Σειρά σας και πάλι:

$$\begin{array}{ll} (-5) - (-4) = & (-9) - (+7) = \\ 9 - (-11) = & 12 - (-7) = \\ -10 - (+6) = & -11 - (-7) = \end{array}$$

Προσπαθήστε και με τις παρακάτω συνδυάζοντας κατάλληλα όσα ξέρετε:

$$\begin{array}{ll} -7 + (-4) + 5 + (-8) = & 5 + (-9) + (-4) + 11 = \\ -6 - (+7) - (-8) + (-4) = & 9 - (-6) - (+10) - (+1) = \end{array}$$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Απαλοιφή παρενθέσεων: Για να βγάλουμε μια παρένθεση, αν έχει μπροστά της θετικό πρόσημο, την παραλείπουμε μαζί με το πρόσημο και γράφουμε όλους τους αριθμούς που είχε μέσα με ό,τι πρόσημο είχαν. Δείτε:

$$(5-3-2)+(-4+1)+(5-8+3)=5-3-2-4+1+5-8+3$$

$$(-5+1)+(-1-2)+(4-3)+(-2+1)=-5+1-1-2+4-3-2+1$$

Αν το πρόσημο μπροστά από την παρένθεση είναι (-), τότε παραλείπουμε το πρόσημο και την παρένθεση και γράφουμε ό,τι υπήρχε μέσα με αλλαγμένο πρόσημο. Δείτε:

$$-(3-7)-(-4+3)-(8+7)-(-3-2)=-3+7+4-3-8-7+3+2$$

Παρατηρήστε τώρα πως εφαρμόζονται οι παραπάνω κανόνες αν στις παρενθέσεις υπάρχουν γράμματα:

$$(\alpha - \beta) - (\gamma - \alpha) + (\beta - \alpha) - (-\alpha + \beta) = \alpha - \beta - \gamma + \alpha + \beta - \alpha + \alpha - \beta$$

$$-(\alpha - \beta) - (-\gamma + \beta) + (\gamma - \alpha) - (\alpha + \beta) = -\alpha + \beta + \gamma - \beta + \gamma - \alpha - \alpha - \beta$$

- ❖ Αν έχουμε άθροισμα ή διαφορά πολλών όρων, προτιμούμε να χωρίσουμε θετικούς από αρνητικούς και να κάνουμε τις πράξεις μεταξύ τους, για

$$-5 + 7 + 3 - 11 - 2 - 4 + 6 + 9 - 8 =$$

παράδειγμα: $(7 + 3 + 6 + 9) - (5 + 11 + 2 + 8) = 25 - (+26) = 25 - 26 = -1$

Πολλαπλασιασμός (διαίρεση) ομόσημων. Πολ/ζουμε (ή διαιρούμε) τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε θετικό πρόσημο στο αποτέλεσμα.

$$-3 \cdot (-4) = 12, \quad (-2) \cdot (-7) = 14, \quad (+4) \cdot (+5) = 20, \quad (-20) : (-4) = 5$$

Πολλαπλασιασμός (διαίρεση) ετερόσημων. Πολ/ζουμε (ή διαιρούμε) τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε αρνητικό πρόσημο στο αποτέλεσμα.

$$-3 \cdot 7 = -21, \quad 7 \cdot (-4) = -28, \quad -12 : (+4) = -3, \quad -20 : (+5) = -4$$

Ιδιότητες πράξεων σε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad (\text{αντιμεταθετική})$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \quad (\text{προσεταιριστική})$$

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha \cdot 1 = \alpha \quad (\text{ουδέτερο στοιχείο})$$

$$\alpha + (-\alpha) = 0 \quad (\text{αντίθετος}) \quad \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 \quad (\text{αντίστροφος αριθμός})$$

Επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{και} \quad \alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Γινόμενο πολλών παραγόντων: Αν το πλήθος των αρνητικών είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός, το αποτέλεσμα έχει θετικό πρόσημο, ενώ αν το πλήθος των αρνητικών είναι περιττός (μονός) το αποτέλεσμα έχει αρνητικό πρόσημο.

- Δεν επιτρέπεται η διαίρεση με το μηδέν, αλλά $\alpha \cdot 0 = 0$.
- Αντίθετοι: Αριθμοί με άθροισμα 0, Αντίστροφοι: Αριθμοί με γινόμενο 1.

Θ2. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ

Ισχύει ότι: $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$.

Ιδιότητες δυνάμεων:

- $\alpha^v \cdot \alpha^k = \alpha^{v+k}$ π.χ.: $5^3 \cdot 5^4 = 5^7$, $2^{-6} \cdot 2^4 = 2^{-2}$, $3^{-1} \cdot 3^{-5} = 3^{-6}$
- $(\alpha^v)^k = \alpha^{v \cdot k}$, π.χ.: $(\alpha^{-1})^{-2} = \alpha^2$, $(3^{-2})^3 = 3^{-6}$
- $\frac{\alpha^v}{\alpha^k} = \alpha^{v-k}$, π.χ.: $\frac{3^5}{3^2} = 3^3$, $\frac{\alpha^3}{\alpha^{-2}} = \alpha^5$.
- $(\alpha\beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}$

Α. Η μόνη περίπτωση το αποτέλεσμα μιας δύναμης να είναι αρνητικός αριθμός, είναι να έχουμε αρνητική βάση υψωμένη σε περιττό (μονό) εκθέτη. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.

Β. Αρνητικός εκθέτης σημαίνει: αντιστρέψτε τον αριθμό και κάντε τον εκθέτη θετικό. Στη συνέχεια υπολογίστε την τιμή της δύναμης. Αν έχετε κάποιο γράμμα υψωμένο σε αρνητικό εκθέτη, μην αντιστρέψετε τίποτα: Μπορείτε να κάνετε ιδιότητες δυνάμεων πολύ πιο εύκολα.

Γ. Θυμηθείτε ότι για να εφαρμόσουμε κάποια ιδιότητα δυνάμεων, πρέπει να έχουμε πολ/σμό ή διαίρεση και οι δυνάμεις πρέπει να έχουν ή κοινή βάση ή κοινό εκθέτη.

Επίσης, μπορείτε να μεταφέρετε ένα παράγοντα από τον παρονομαστή στον αριθμητή ενός κλάσματος, αρκεί να του αλλάξετε πρόσημο στον εκθέτη.

Δ. Όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων που γνωρίζετε, εφαρμόζονται και ισχύουν και για θετικούς και για αρνητικούς εκθέτες.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα υπολογισμού δυνάμεων:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = (-3)^3 = -27, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}, \quad (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Αν έχετε να αντιμετωπίσετε παράσταση με γράμματα και ακέραιους εκθέτες, ακόμα και αν σας δίνουν τιμές για τα γράμματα, δουλέψτε με ιδιότητες και μόνο στο τέλος κάντε αντικατάσταση. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

Βρείτε την τιμή της $A = \frac{(x^{-2} \cdot y)^3 \cdot (x^2 \cdot y^{-2})^2}{x^{-5} \cdot y^{-4}}$ για $x = -2, y = \frac{1}{4}$.

$$A = \frac{x^{-6} \cdot y^3 \cdot x^4 \cdot y^{-4}}{x^{-5} \cdot y^{-4}} = x^{-6+4+5} \cdot y^{3-4+4} = x^3 \cdot y^3 = (xy)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Παρατηρήστε ότι μπορώ να μεταφέρω τις μεταβλητές από τον παρονομαστή στον αριθμητή, απλώς αλλάζοντας πρόσημο στον εκθέτη.

Δείτε και άλλα παραδείγματα:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}, \quad (-4)^{-2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$(-2)^{-4} \cdot (-2)^6 \cdot (-2) = (-2)^{-4+6+1} = (-2)^3 = -8.$$

$$\frac{(-3)^4 \cdot (-3)^{-7}}{(-3)^{-5} \cdot (-3)^3} = \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-2}} = (-3)^{-3+2} = (-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$$

$$(-5)^{-3} \cdot (-4)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{-3} = \left[(-5) \cdot (-4) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)\right]^{-3} = (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$(\alpha^{-2} \cdot \beta^3)^{-2} \cdot (\alpha^4 \cdot \beta^{-3})^{-1} = \alpha^4 \cdot \beta^{-6} \cdot \alpha^{-4} \cdot \beta^3 = \alpha^0 \cdot \beta^{-3} = \beta^{-3}$$

$$\frac{\alpha^{-3} \cdot \beta^4}{\alpha^{-5} \cdot \beta^{-3}} = \alpha^{-3} \cdot \beta^4 \cdot \alpha^5 \cdot \beta^3 = \alpha^2 \cdot \beta^7$$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΣ1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

A. Ας ξεκινήσουμε με κάποια «απλά» πράγματα:

1. $(-3+8) - (-5-2) + (4-9) + (5-8) - (-2-1) =$
2. $[-5 - (-8+11)] - [-(-4-1) + (2-6)] - [(-3+5) - (2-1)] =$
3. $-5 \cdot 3 - (-2) \cdot (-3) + 4 \cdot (2+3) - 3 \cdot (-3+7) + 2 \cdot (4-6) - 7 =$
4. $(-2+5) \cdot 4 : (-6) - [4 \cdot (-5) : (-2) : 5] + [(-2) \cdot (-8) : 16 - 4] =$
5. $(-3^3 + 7) : [2^3 - (-3) \cdot (-1)] + (-4^2 : 8 - 5) - (6^2 - 12 : 3) - 3^2 =$
6. $-2^4 + 3^2 : (-9) - 5^2 + [-7 + 3^2 - 2 \cdot (-4^2 : 8)] - 5 + 4 \cdot (-3) =$

(Αποτελέσματα: 7, -10, -24, -7, -44, -53)

B. Βρείτε το αποτέλεσμα στις παρακάτω πράξεις:

- i. $-4 - 8 : (-2) \cdot (-3) + 5 - 16 : (-4) - (-3) \cdot 6 =$
- ii. $-4 + (-9) : (-3) : \left(\frac{1}{2}\right) + (-8 + 2) : (-5 + 2) \cdot (-2) =$
- iii. $(-12 + 4) : (-4) + 5 \cdot (-3 - 1) - 9 : (-8 + 11) =$
- iv. $18 : (-11 + 5) - 2^2 - 5 + (-6^2) : (-3)^2 - 2^3 : (6 - 10) =$
- v. $(-1 - 4) \cdot (-10 + 7) : (-5) - 3 \cdot 2 : (7 - 5) =$
- vi. $\left[-(-14 + 6) : (-4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] - [(-6 + 2) + 3 \cdot (-4)] =$
- vii. $\left[-\left(\frac{2}{3} - 1\right) - \left(-3 + \frac{5}{3}\right) \right] : 3 - \left[\left(\frac{9}{4} - 2\right) : \left(-\frac{1}{8}\right) - 3 \cdot \left(1 - \frac{5}{4}\right) \right] =$

(Αποτελέσματα: i. 11 ii. -2 iii. -21 iv. -14 v. -6 vi. 17 vii. 65/36)

Γ. Έχουμε και πιο δύσκολες:

$$a. \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot (-3 - 1) - 2^3 : (-2)}{(-6 + 9) - (-4)^2 : 4 + 2} =$$

$$b. \frac{\frac{7}{4} - \left(\frac{1}{3^2}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) + 1} =$$

$$c. \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - (-6 + 4)^3 =$$

$$d. \left(-\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{-2^3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 : \left(-\frac{1}{2^4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 =$$

(Αποτελέσματα: a. 1 b. $\frac{25}{8}$ c. $\frac{173}{18}$ d. 25)

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΣ2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις σαν δύναμη ενός αριθμού:

a. $8^3 \cdot (-2)^4 \cdot 4^{-3}$ b. $9^3 \cdot 27 \cdot (-3)^{-4}$ c. $\frac{4^{-3} \cdot 8^2}{16^{-2}}$

2. Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω πράξεων:

a. $\frac{24^{-5} \cdot (-24)^8}{-27 \cdot (-4)^3}$ b. $\frac{-14^3}{7^3} - \frac{(-3)^{-2}}{(-3)^{-3}} + \frac{-5^{-1}}{15^{-1}}$ c. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot (-2)^4 : (-3)^2$

3. Αν ισχύει ότι: $x \cdot y = -2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \frac{(x \cdot y^{-2})^{-1} \cdot (x^2 \cdot y^{-1})^3}{x^2 \cdot y^{-4}} \quad B = \left[-(-x \cdot y)^{-2} \right]^{-1} - \left[-(x \cdot y)^{-3} \right]^{-1}$$

4. Προσπαθήστε να βρείτε το σωστό αποτέλεσμα στις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{(\alpha^{-2} \cdot \beta^3)^{-1} \cdot (\alpha^3 \cdot \beta^{-2})^{-2}}{(\alpha^{-3} \cdot \beta)^2 \cdot \beta^{-3}} \quad \text{για } \alpha = -4, \beta = 0,25.$$

$$B = \frac{(x^2 \cdot y^{-3})^{-2} \cdot (x^{-1} \cdot y)^{-3}}{(x^2 \cdot y^{-1})^2} \quad \text{αν } \frac{y}{x} = -2.$$

$$\Gamma = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot -2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(2 - \frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{7}{8} - 1\right)^2}$$

5. Αν ισχύει ότι: $x \cdot y^2 = -2$ και $\alpha^2 \cdot \beta = -3$, να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = (x^2 \cdot y^4)^{-1} + (\alpha^{-4} \cdot \beta^{-2})^{-1}$$

$$B = (x^{-1} \cdot y^2)^{-3} \cdot (x^2 \cdot y^{-8})^{-1} - [(-\alpha)^{-6} \cdot (-\beta)^{-3}]^{-1}$$

Αποτελέσματα: **Άσκηση 1** : a. 2^7 b. 3^8 c. 2^8

Άσκηση 2: a. 8 b. -8 c. -6

Άσκηση 3: A: -8 B: -12

Άσκηση 4: A=1, B=-32, $\Gamma = -\frac{1}{8}$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Άσκηση 5: A: $\frac{37}{4}$ B: -29

ΑΣ3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΣΕ ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

A. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις, αφού πρώτα κάνετε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις:

$$\begin{array}{lll} 1. \left(\frac{2}{3}-2\right)^{-2} = & 2. \left(-\frac{3}{4}-1\right)^{-2} & 3. \left(2-\frac{7}{5}\right)^{-3} \\ 4. \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^3 = & 5. \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^{-2} & 6. \left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)^{-3} \\ 7. \left(-1-\frac{1}{2}\right)^2 = & 8. \left(-2-\frac{2}{3}\right)^{-3} & 9. \left(\frac{7}{4}-\frac{8}{3}\right)^{-2} \end{array}$$

(Αποτελέσματα: $\frac{9}{16}, \frac{16}{49}, \frac{125}{27}, \frac{1}{216}, 144, -\frac{216}{2197}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{512}, \frac{144}{121}$)

B. Να βγάλετε τις αγκύλες και τις παρενθέσεις και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων, για τις τιμές των μεταβλητών που δίνονται κάθε φορά:

- $[\alpha - (\beta - \gamma)] - (-\alpha + \beta) + (-\gamma - \beta) - [\beta - (\alpha + \gamma)], \text{ αν } \alpha = -3, \beta = -4, \gamma = 2.$
- $[-(\alpha - \beta) - (-\gamma + \beta)] - [(-\alpha + \gamma) + (-\beta + \alpha)], \text{ αν } \alpha = 5, \beta = -4$
- $(\alpha^2 \cdot \beta^{-3})^{-1} \cdot (\alpha^{-3} \cdot \beta^2)^{-2}, \text{ αν } \alpha = -2, \beta = 4.$
- $(\alpha^{-1} \cdot \beta)^{-3} \cdot (\alpha^2 \cdot \beta^{-2})^{-1}, \text{ αν } \alpha = 8, \beta = -4.$
- $\frac{\alpha^{-3} \cdot \beta^4}{\alpha^{-5} \cdot \beta^{-1}}, \text{ αν } \alpha = 27, \beta = \frac{1}{3}$

(Αποτελέσματα: 9, -9, 4, -2, 3)

Γ. Να το βαρύνουμε λίγο:

- $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} =$
- $18 \cdot (-11+5)^{-2} - 2^{-2} - (-6^{-2}) : (-3)^{-2} - 2^3 : (6-10) =$
- $\frac{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{4}-1\right)^{-2}}{\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-6)} =$
- $\left(2-\frac{5}{3}\right)^{-2} - \left[\left(\frac{5}{3}-1\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^{-3} - (-6+4)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(Αποτελέσματα: $a. \frac{5}{2}$ $b. \frac{5}{2}$ $c. -26$ $d. \frac{21}{2}$)

Δ. Αν γνωρίζετε ότι : $\frac{a^2}{\beta} = -2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

1. $a^4 \cdot \beta^{-2}$ 2. $\frac{\beta^3}{a^6}$ 3. $(a^3 \cdot \beta^{-2})^{-1} \cdot a \cdot \beta^{-1}$ 4. $\frac{\alpha^{-3} \cdot \beta^{-4}}{\alpha^{-5} \cdot \beta^{-3}}$

(Αποτελέσματα: 4 , $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{2}$, -2)

Ε. Να εφαρμόσετε ιδιότητες δυνάμεων για να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω πράξεων (μακριά από κομπιουτεράκι, γιατί ο Θεός της Φυσικής σας βλέπει!).

1. $\frac{10^{-3} \cdot (10^{-2})^{-1}}{10^{-5} \cdot 10^3} =$ 2. $\frac{(10^{-3})^{-2} \cdot (10^4)^{-1}}{(10^{-2})^3 \cdot (10^{-1})^{-6}} =$ 3. $23,5 \cdot 10^{-4} + 7,65 \cdot 10^{-5} =$

4. $42,56 \cdot 10^{-3} - 1,256 \cdot 10^{-2}$ 5. $\frac{56,4 \cdot 10^{-4}}{1,41 \cdot 10^{-6}} =$ 6. $\frac{1,28 \cdot 10^{-9}}{64 \cdot 10^{-11}} =$

Απαντήσεις: 1. 10 2. 100 3. 10^{-4} 4. $3 \cdot 10^{-2}$ 5. $4 \cdot 10^3$ 6. 2

ΑΣ4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $3x - 2 = 0$ 2. $4 - 2x = 0$ 3. $3(x - 2) = 3x + 1$
 4. $2(3 - 2x) = 4(1 - x) + 2$ 5. $3(2 - 3x) - 2(x - 1) = 5(x - 3)$
 Απαντήσεις: 1. $x = \frac{2}{3}$ 2. $x = 2$ 3. Αδύνατη 4. Ταυτότητα 5. $x = \frac{23}{16}$

6. $2x - (3x - 2) = 4 - (-x + 3)$ 7. $2 - 3(1 - 4x) = -2(x + 3)$
 8. $\frac{x}{2} - \frac{2 - x}{6} = \frac{3x - 1}{3} - 1$ 9. $x - \frac{3(x - 1)}{2} = \frac{x}{3} + \frac{4 - x}{6}$
 10. $\frac{2x}{3} - 1 = \frac{3(x - 2)}{5} - \frac{2(1 - x)}{3}$ 11. $\frac{-2 + x}{8} - \frac{x - 2}{4} - \frac{3(3 - 2x)}{2} = 0$

Απαντήσεις: 6. $x = \frac{1}{2}$ 7. $x = -\frac{14}{5}$ 8. $x = 3$ 9. $x = \frac{5}{4}$ 10. $x = \frac{13}{9}$ 11. $x = \frac{34}{23}$

Πάμε πάλι από την αρχή: 1. $2x - 3 = 0$ 2. $9 - x = 0$ 3. $4 - 3x = 0$

4. $2(x - 4) = 1 - 3(-x + 2)$ 5. $5(1 - 2x) = 3(2 - 3x)$

6. $\frac{2x - 3}{4} = \frac{3(1 - x)}{2}$ 7. $\frac{1 - x}{2} - \frac{x - 4}{6} = 0$

8. $x - \frac{1 - 2x}{6} = 1 - \frac{2}{3}(x - 1)$ 9. $\frac{3}{2}(2 - x) - \frac{1}{4}(1 - x) = \frac{x}{3} - \frac{1 - 2x}{12}$

10. $\frac{2}{3}\left(x - \frac{x - 1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1 - 2x}{3}\right)$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: 1) $\frac{3}{2}$ 2) 9 3) $\frac{4}{3}$ 4) -3 5) -1 6) $\frac{6}{5}$ 7) $\frac{7}{4}$ 8) $\frac{11}{12}$ 9) $\frac{34}{21}$ 10) 4

Θ3. ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Προτάσεις οι οποίες απαντώνται συχνά σε προβλήματα εξισώσεων:

1. Δύο αριθμοί έχουν γνωστό άθροισμα, ας το πούμε «α». Αν ο ένας από τους δύο είναι ο x , ο άλλος θα είναι ο « $a - x$ ». Σε μια παράσταση για παράδειγμα, υπάρχουν 100 θεατές, ενήλικοι και παιδιά. Αν είναι x το πλήθος των παιδιών, τότε το πλήθος των ενηλίκων θα είναι ίσο με $(100 - x)$.
2. Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά γνωστό αριθμό «α». Αν ο ένας είναι ο x , ο άλλος θα συμβολιστεί με $(x + a)$ ή με $(x - a)$, ανάλογα με το αν με x συμβολίσαμε το

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

μικρότερο η το μεγαλύτερο από τους δύο. Σε ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις διαφέρουν κατά 4cm, αν ονομάσουμε x το μήκος του, τότε το πλάτος του θα είναι $(x-4)$. Αν επιλέξουμε να ονομάσουμε x το πλάτος του, τότε το μήκος του θα ήταν $(x+4)$.

3. Ο ένας αριθμός είναι πολ/σιος ή μέρος του άλλου. Ονομάζουμε τον ένα από τους δύο x . Ο άλλος θα είναι (κάτι) επί x . Σε μια συναυλία, τα παιδιά πληρώνουν τα $\frac{2}{3}$ του κανονικού εισιτηρίου. Αν είναι x το κανονικό εισιτήριο, το παιδικό θα είναι $\frac{2x}{3}$.
4. Έχουμε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Αν ο μικρότερος είναι ο « x », οι επόμενοι θα είναι $(x+1)$, $(x+2)$ κ.λ.π.. Αν το πλήθος των διαδοχικών φυσικών είναι περιττός αριθμός, προτιμήστε να ονομάσετε με x τον μεσαίο από αυτούς. Οι 5 διαδοχικοί θα είναι: $x-2$, $x-1$, x , $x+1$, $x+2$.

Β. Τρόπος για να λύσετε πρόβλημα με εξίσωση.

Πρώτα πρέπει να αποφασίσουμε τι θα ορίσουμε σαν άγνωστο « x ». Αν υπάρχει ένα μοναδικό ζητούμενο, ονομάστε αυτό « x ». Αν υπάρχουν παραπάνω από ένα ζητούμενα (π.χ. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου για το οποίο γνωρίζουμε ότι..., Πόσα είναι τα παιδιά και πόσοι οι γονείς....., Πόσα χρήματα πήρε ο κάθε κληρονόμος.... Κ.λ.π) ονομάστε « x » κάποιο από αυτά και εκφράστε οπωσδήποτε τον άλλο ή τους άλλους αγνώστους με τη βοήθεια του x . Αφού τελειώσετε με τον ορισμό του αγνώστου, κατασκευάστε την εξίσωση μεταφράζοντας σε αριθμητικές πράξεις την εκφώνηση. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

- Αν σας έχουν δώσει την περίμετρο ενός επίπεδου σχήματος, το άθροισμα των μηκών των πλευρών του ισούται με αυτήν.
- Αν σας έχουν δώσει τις εισπράξεις μιας παράστασης, πολ/στε τον αριθμό κάθε κατηγορίας θεατών με το αντίστοιχο εισιτήριο και αθροίστε τα επιμέρους γινόμενα: Δίνουν το ποσό που εισπράχθηκε.
- Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες καθώς και οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, ενώ οι εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.
- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° , ενώ οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Γ. Ειδικές κατηγορίες προβλημάτων

Προβλήματα ανάμιξης. Κάντε αντικατάσταση στην παρακάτω σχέση: (Ποσότητα $1^{ου}$)(Περιεκτικότητα του $1^{ου}$) + (Ποσότητα $2^{ου}$)(Περιεκτικότητα του $2^{ου}$) = (Συνολική Ποσότητα)(Τελική περιεκτικότητα). Οι περιεκτικότητες είναι συνήθως εκφρασμένες σε % ποσοστό, ενώ οι ποσότητες καθενός από τα επιμέρους συστατικά είναι σε λίτρα ή σε γραμμάρια.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Προβλήματα με βρύσες ή έργα: Αν ονομάσετε x τις ώρες ή τις ημέρες που θα χρειασθούν για το γέμισμα της δεξαμενής ή της αποπεράτωσης του έργου, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους κλασμάτων επί x , ισούται με «1». Το 1 συμβολίζει το έργο ολόκληρο ή μια γεμάτη δεξαμενή. Για παράδειγμα: Μια δεξαμενή έχει τρεις αντλίες. Η πρώτη, γεμίζει μόνη της τη δεξαμενή σε 4 ώρες, η δεύτερη σε τρεις ώρες, ενώ η τρίτη την αδειάζει μέσα σε 6 ώρες. Αν λειτουργούν και οι τρεις αντλίες ταυτόχρονα σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή;

Έστω x οι ώρες που απαιτούνται. Σε μία ώρα γεμίζει το $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$ της δεξαμενής.

Συνεπώς: $x \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x \cdot \frac{5}{12} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5} = 2,4h$ ή $2h$ 24 min.

Προβλήματα ποσοστών: Γενικά, αν t το ποσοστό %, κάνουμε αντικατάσταση στην σχέση: (Αρχικό ποσό) $\cdot \frac{100 \pm t}{100} =$ (Τελικό ποσό). Χρησιμοποιούμε το (+) αν έχουμε αύξηση του αρχικού ποσού και το (-) αν υπάρχει έκπτωση στο αρχικό ποσό.

Προβλήματα Ευκλείδειας Διαίρεσης: Αντικαταστήστε στο γνωστό(;) περσινό σας τύπο: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, όπου Δ ο διαιρετέος, δ ο διαιρέτης π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο.

Προβλήματα κίνησης: Αν τα οχήματα ξεκινούν ταυτόχρονα, τότε ισχύει ότι :
 $\frac{\text{απόσταση που διάνυσε το } 1^{\text{ο}}}{\text{ταχύτητα του } 1^{\text{ο}}}} = \frac{\text{απόσταση που διάνυσε το } 2^{\text{ο}}}{\text{ταχύτητα του } 2^{\text{ο}}}}$ αφού ο χρόνος «μετρά» το ίδιο και για τα δύο.

Αν τα οχήματα διανύουν την ίδια απόσταση, χρησιμοποιήστε τη σχέση :
 $(\text{Ταχύτητα του } 1^{\text{ο}}) \cdot (\text{Χρόνος κίνησης του } 1^{\text{ο}}) = (\text{Ταχύτητα του } 2^{\text{ο}}) \cdot (\text{Χρόνος κίνησης του } 2^{\text{ο}})$
Και οι δύο παραπάνω σχέσεις, στηρίζονται στον τύπο $S = v \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{S}{v}$.

Προβλήματα με ηλικίες: Η διαφορά ηλικίας μεταξύ δύο ατόμων δεν αλλάζει, όσα χρόνια κι αν περάσουν. Αυτό που αλλάζει είναι ο λόγος των ηλικιών. Αν για παράδειγμα ένας πατέρας είναι 33 ετών και ο γιος του 9, μετά από τρία χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια από την ηλικία του γιου. Ονομάστε x λοιπόν τα χρόνια που θα περάσουν και γράψτε τη σχέση που συνδέει τις ηλικίες τους όπως την περιγράφει το πρόβλημα κάθε φορά.

Προβλήματα με ωρομίσθιο ή ημερομίσθιο: Οι αποδοχές ενός εργαζόμενου βρίσκονται αν πολ/με το ωρομίσθιο (ή το ημερομίσθιο) με τις ώρες που εργάστηκε (ή τις ημέρες). Αν πρόκειται για δύο εργαζόμενους, εκφράστε το σύνολο των αποδοχών

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

καθενός και γράψτε την σχέση που τις συνδέει: Συνήθως, αφαιρούμε το μικρότερο από το μεγαλύτερο ποσό και το εξισώνουμε με τη διαφορά που μας λείπει η εκφώνηση.

Παρατήρηση: Μην απομνημονεύσετε τις παραπάνω συμβουλές. Προσπαθήστε να σκέπτεστε και όχι να θυμάστε. Εξασκηθείτε με επιπλέον ασκήσεις και εξοικειωθείτε με την «μαθηματικοποίηση» εκφράσεων και προβλημάτων.

ΑΣ5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 25 και αν από τα $\frac{3}{5}$ του μεγαλύτερου, αφαιρέσουμε τα $\frac{2}{3}$ του μικρότερου, βρίσκουμε $\frac{26}{3}$. Να βρεθούν οι αριθμοί.
2. Δύο αριθμοί έχουν διαφορά 12 μονάδες και αν στα $\frac{3}{4}$ του πρώτου προσθέσουμε τα $\frac{3}{5}$ του δεύτερου βρίσκουμε 18. Να βρείτε τους αριθμούς.
3. Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου, ισούται με την πλευρά ενός τετραγώνου. Να βρείτε την πλευρά, αν γνωρίζετε ότι οι περιμέτροί τους γίνονται ίσοι, αν μεγαλώσουμε την πλευρά του τριγώνου κατά 2cm.
4. Σε ένα τηλεπαιχνίδι, η σωστή απάντηση κερδίζει 30 €, ενώ για κάθε λάθος απάντηση χάνουμε 20 €. Ένας παίκτης, μετά από 30 ερωτήσεις στις οποίες απάντησε, κέρδισε 450€. Να βρείτε σε πόσες είχε απαντήσει σωστά.
5. Τρία αδέρφια μοιράστηκαν ένα ποσό ως εξής: Ο Άλφας πήρε το $\frac{1}{5}$, ο Βήτας πήρε 150 € περισσότερα από τον Άλφα και ο Δέλτας το $\frac{1}{3}$ του συνολικού ποσού και 10€ ακόμα. Να βρείτε ποιο ήταν το ποσό που μοιράστηκαν.
6. Μια παράσταση είχε 100 θεατές συνολικά. Αν οι ενήλικοι πληρώνουν ολόκληρο εισιτήριο 9€ ενώ οι ανήλικοι πληρώνουν 6€, και οι εισπράξεις ήταν 843€, να βρείτε πόσοι ήταν οι ανήλικοι.
7. Αν στα $\frac{2}{5}$ ενός αριθμού αυξημένου κατά 2 μονάδες, προσθέσουμε το $\frac{1}{3}$ του αριθμού μειωμένο κατά 1 μονάδα, βρίσκουμε το τριπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 5 μονάδες. Να βρείτε τον αριθμό.
8. Ο Πάκης αμείβεται με 4€ την ώρα παραπάνω από τον Σάκη. Ο Πάκης δούλεψε για 15 ώρες ενώ ο Σάκης για 12 ώρες και πήρε τελικά 108€ λιγότερο από τον Πάκη. Να βρείτε το ωρομίσθιο του.
9. Οι μαθητές ενός σχολείου προκειμένου να πάνε εκδρομή, έπρεπε να πληρώσουν 8€ ο καθένας. Οκτώ άτομα όμως το μετάνιωσαν, οι υπόλοιποι έφεραν από 9€ ο καθένας και έτσι τους περίσσεψαν και 28€. Να βρείτε πόσα

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

άτομα έχει το σχολείο.

10. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 5cm. Αν διπλασιάσουμε τη μικρή πλευρά και αυξήσουμε την μεγάλη κατά 2cm, η περίμετρος του ορθογωνίου μεγαλώνει κατά 18cm. Να βρεθούν οι αρχικές του διαστάσεις.
11. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 3cm. Αν αυξήσουμε τη μεγάλη πλευρά του κατά 2cm, το εμβαδόν του μεγαλώνει κατά 12cm^2 . Να βρεθούν οι πλευρές του.
12. Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 28, αν ο ένας είναι τα $\frac{3}{4}$ του άλλου.
13. Να βρείτε δύο αριθμούς με διαφορά 5 μονάδες, αν ο ένας είναι τα $\frac{2}{3}$ του άλλου.
14. Τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα 120. Να βρεθούν, αν γνωρίζουμε ότι ο $2^{\text{ος}}$ είναι τα $\frac{2}{3}$ του $1^{\text{ου}}$, ενώ ο τρίτος είναι το $\frac{1}{2}$ του $2^{\text{ου}}$ αριθμού.
15. Το $\frac{1}{3}$ των μαθητών ενός σχολείου φθάνει στο σχολείο με τα πόδια, το $\frac{1}{4}$ με λεωφορείο, το $\frac{1}{6}$ με Ι.Χ, ενώ 24 μαθητές φθάνουν με ποδήλατο. Πόσοι είναι συνολικά οι μαθητές;
16. Όλοι μου οι φίλοι εκτός από 8 είναι Έλληνες, όλοι μου οι φίλοι εκτός από 12 είναι Ιταλοί και όλοι μου οι φίλοι εκτός από 14 είναι Ασιάτες. Αν λάβετε υπόψη σας ότι όλοι μου οι φίλοι είναι Έλληνες, Ιταλοί ή Ασιάτες, πόσοι είναι οι φίλοι μου κάθε κατηγορίας;
17. Ο Μήτσος έχει τριπλάσια χρήματα από το Κατινάκι. Αποφασίζει να της δώσει 12€ , αλλά τώρα έχει ακριβώς τα διπλάσια χρήματα από εκείνη. Πόσα ακόμα χρήματα πρέπει να της δώσει για να έχουν ακριβώς τα ίδια χρήματα;
18. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 2m. Αν η μεγαλύτερη από τις διαστάσεις μεγαλώσει κατά 3m, το εμβαδόν του ορθογωνίου μεγαλώνει κατά 24m^2 . Να βρείτε τις αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου.

Απαντήσεις: 1) 20 ο μεγάλος, 5 ο μικρός 2) 8 και 20 οι δύο αριθμοί
3) 6 cm η αρχική πλευρά 4) 21 σωστές, 9 λάθος 5) 600 € 6) 81 μεγάλοι , 19 μικροί 7) ο αριθμός είναι ο $\frac{36}{17}$ 8) 14€ και 18€ 9) 100 μαθητές 10) 7 cm και 12cm τα αρχικά μήκη πλευρών 11) 6cm και 9cm τα αρχικά μήκη των πλευρών του 12) 16 και 12 13) ο ένας είναι ο 15 ή ο (-10) 14) 60,40 και 20 15) 96 μαθητές 16) 9, 5 και 3 Ασιάτες 17) 24€ 18) 8 επί 10

ΑΣ6. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

1. Αν στα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού, προσθέσουμε το μισό του αριθμού, βρίσκουμε τον αριθμό μειωμένο κατά 2 μονάδες. Να βρεθεί ο αριθμός.

2. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο, έχουν κατασκευαστεί με ίδιο μήκος πλευράς. Αν η πλευρά του τετραγώνου μειωθεί κατά 1cm, τα δύο σχήματα αποκτούν ίσες περιμέτρους. Να βρεθεί το μήκος της αρχικής πλευράς των δύο σχημάτων.

3. Ο Άλφας αμείβεται με 12€ παραπάνω από τον Βήτα κάθε ημέρα. Ο Βήτας εργάστηκε 20 ημέρες, ενώ ο Άλφας για 10 ημέρες. Τελικά ο Βήτας εισέπραξε 160€ παραπάνω από τον Άλφα. Να βρείτε πόσα χρήματα ήταν το ημερομίσθιο καθενός.

4. Ο Γιώργος έχει 120€ παραπάνω από τον Κώστα. Αν ο Γιώργος ξοδέψει τα μισά όσων έχει, ενώ ο Κώστας ξοδέψει 20€, τότε θα τους μείνει το ίδιο ακριβώς ποσό. Να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους αρχικά.

5. Να λύσετε και να συναληθεύσετε τα παρακάτω ζεύγη ανισώσεων:

$$a. \begin{cases} -3x < -6 \\ 4x \geq -8 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} 2x \leq 10 \\ -x < -3 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} -5x > 0 \\ 2x < -1 \\ -x < 4 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} 3(2x - 1) < 7x - 6 \\ 4(1 - 2x) < 5(4 - 2x) \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} 3x - \frac{1-2x}{4} \leq 1 - \frac{x-1}{8} \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{6} - \frac{x}{4} \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} \frac{3(x-1)}{2} - \frac{2-x}{6} \leq \frac{1}{3} - \frac{x+2}{4} \\ \frac{1-2x}{4} - \frac{1}{2} \geq \frac{3x}{2} - \frac{4x-1}{8} \end{cases}$$

$$-3 \leq 2x - 5 \leq 4$$

$$g. -1 < 1 - 3x < 2$$

$$3 \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{7}{2}$$

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

6. Να λύσετε και να συναληθεύσετε τα παρακάτω ζεύγη ανισώσεων:

$$a. \begin{cases} 2x < 3x - 4 \\ 5(x - 2) \leq 15 \end{cases} \quad b. \begin{cases} 3(x - 2) - 2(1 - 3x) \geq 1 \\ 4(1 - x) \leq 3 - 2(3x - 1) \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{1-x}{6} < 1 - \frac{2x-3}{2} \\ \frac{3(1-x)}{2} \geq \frac{x}{4} - \frac{x-3}{8} \end{cases} \quad d. \begin{cases} x - \frac{2x-3}{4} \geq 2 - \frac{3x}{2} \\ \frac{x}{3} > \frac{3x-2}{4} + \frac{x-1}{6} \end{cases}$$

Μπορείτε να εντοπίσετε τις ακέραιες λύσεις σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

7. Να χαράξετε άξονες και να συναληθεύσετε τα παρακάτω ζεύγη ανισώσεων:

$$\begin{cases} -6 < 2x \leq -2 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < 2x - 5 < 4 \\ 3 > 6 - 3x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 < x + 2 \leq -3 \\ 3 > 1 - 2x > -5 \end{cases}$$

Απαντήσεις: 1. $x = -12$ 2. $x = 4$ cm 3. 28€, 40€ 4. 160€, 280€ 5. a. $x > 2$

5.b. $3 < x \leq 5$ 5.c. $-4 < x < -\frac{1}{2}$ 5.d. $3 < x < 8$ 5.e. $\frac{2}{5} < x \leq \frac{11}{29}$

5.f. $x \leq -\frac{1}{4}$ 5.g. $1 \leq x \leq \frac{9}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, $\frac{20}{3} \leq x \leq \frac{23}{3}$

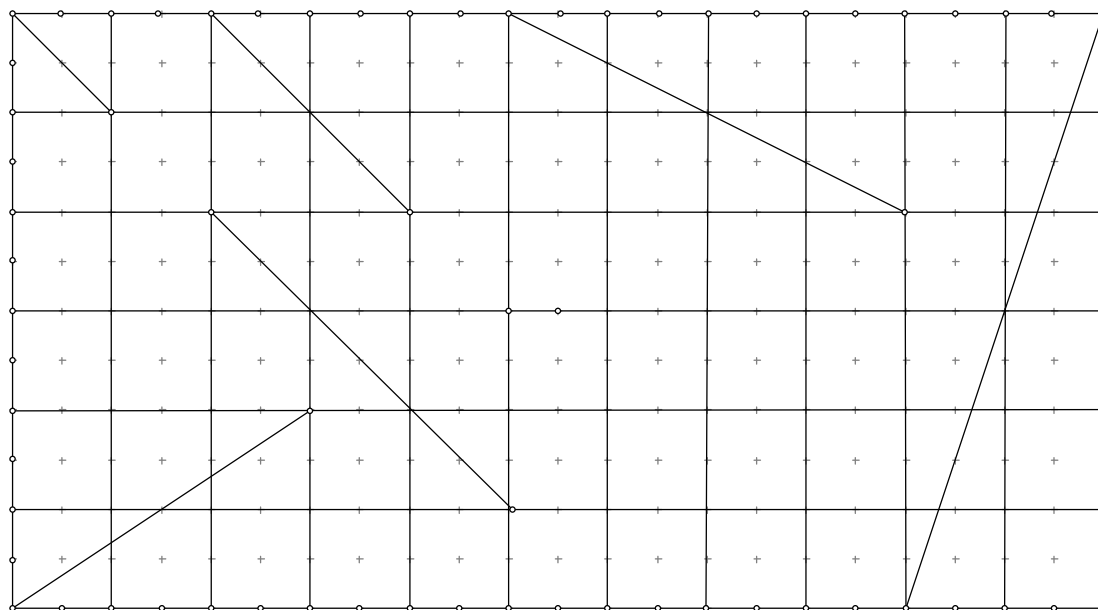
6. a. $4 < x \leq 5$ b. Δεν συναληθεύουν c. $x \leq \frac{9}{13}$ d. $\frac{5}{8} \leq x < \frac{8}{7}$

ΑΣ7. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ - ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΟΥΣ ΑΡΡΗΤΟΥΣ

Θεωρήστε ότι η πλευρά κάθε μικρού τετραγώνου στο παρακάτω σχήμα έχει μήκος ένα εκατοστό.

Προσπαθήστε να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων α, β, γ, δ, ε, και χ.



Στη συνέχεια, κατασκευάστε με παρόμοιο τρόπο τμήματα με μήκη ίσα με

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{6}.$$

Να απλοποιήσετε τα παρακάτω ριζικά και να κάνετε όλες τις δυνατές πράξεις μεταξύ τους:

$$\sqrt{8} + \sqrt{12} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{3} =$$

$$\sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{27} - 2\sqrt{3} =$$

$$\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{48} - \sqrt{27} =$$

$$(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2}) =$$

$$(3\sqrt{2} - 4) \cdot (3\sqrt{2} + 4) - (2\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{3}) =$$

5. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

$$\alpha. \sqrt{0,49} = \quad \beta. \sqrt{(-19)^2} = \quad \gamma. \sqrt{\frac{16}{9}} = \quad \delta. (\sqrt{\beta})^2 =$$

$$\epsilon. \sqrt{0,25} = \quad \zeta. \sqrt{(-17)^2} = \quad \eta. \sqrt{\frac{36}{25}} = \quad \theta. (\sqrt{\alpha})^2 =$$

$$\iota. \sqrt{0,64} = \quad \iota\alpha. \sqrt{(-23)^2} = \quad \iota\beta. \sqrt{\frac{16}{81}} = \quad \iota\gamma. (\sqrt{x})^2 =$$

$$\iota\epsilon. \sqrt{0,16} = \quad \iota\zeta. \sqrt{(-21)^2} = \quad \iota\eta. \sqrt{\frac{9}{16}} = \quad \iota\theta. (\sqrt{\gamma})^2 =$$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά και να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω παραστάσεων:

$$\alpha. (\sqrt{\quad})^2 + 5 = 10 \quad \beta. \sqrt{\quad} \cdot \frac{4}{3} = 1 \quad \gamma. \sqrt{12 - \sqrt{11 - \sqrt{4}}} =$$

$$\delta. (\sqrt{\quad})^2 + 6 = 9 \quad \epsilon. \sqrt{\quad} \cdot \frac{2}{3} = 1 \quad \zeta. \sqrt{11 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}} =$$

$$\eta. (\sqrt{\quad})^2 + 4 = 7 \quad \theta. \sqrt{\quad} \cdot \frac{4}{5} = 1 \quad \iota. \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{9}}} =$$

$$\iota\alpha. (\sqrt{\quad})^2 + 6 = 11 \quad \iota\beta. \sqrt{\quad} \cdot \frac{5}{3} = 1 \quad \iota\gamma. \sqrt{5 + \sqrt{18 - \sqrt{4}}} =$$

Θ4. ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΓΙΑ ΕΥΘΕΙΕΣ -ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α. Δύο ποσά λέγονται ανάλογα , όταν ο λόγος των αντίστοιχων τιμών δύο ποσών (ψ/χ) είναι σταθερός. Όταν , ας πούμε ισχύει ότι $\psi/\chi=a$, όπου a σταθερός, τότε τα ποσά χ και ψ είναι ανάλογα και ισχύει $\psi=a \chi$. Δείτε το επόμενο παράδειγμα:

χ	-3	-1	2	4
ψ	12	4	-8	-16

Είναι φανερό ότι ισχύει $\frac{y}{x} = \frac{12}{-3} = \frac{-8}{2} = \frac{4}{-1} = \dots = -4$, αρα $y = -4x$.

Β. Οι ευθείες της μορφής $y=ax$, διέρχονται όλες από το σημείο $(0,0)$ και έχουν φορά προς τα άνω όταν $a>0$ και προς τα κάτω αν $a<0$. Αν σας ζητηθεί η γραφική παράσταση , δώστε μια τιμή στο χ και βρείτε μια τιμή για το ψ . Συνδέστε το (χ,ψ) που βρήκατε με το $(0,0)$ και τελειώσατε. Αν, αντίθετα, δίνεται η γραφική και ζητείται η εξίσωση, θα πρέπει να δείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου (εκτός της αρχής των αξόνων) και να βρείτε το a διαιρώντας το ψ του σημείου που είδατε με το χ του.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θυμηθείτε επίσης ότι το a (όταν είναι θετικό) , ισούται με την εφαπτομένη της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $\chi\chi'$.

Γ. Οι ευθείες της μορφής $y=ax+\beta$, περνούν κάθε φορά από το σημείο $(0,\beta)$. Επίσης κάθε τέτοια ευθεία είναι παράλληλη με την $y=ax$. Για να φτιάξετε τη γραφική της, δώστε μια τιμή στο χ (εκτός από 0) και βρείτε το ψ . Ενώστε το (χ,ψ) που βρήκατε με το $(0,\beta)$. Αν δίνεται η γραφική και ζητείται η εξίσωση, βρείτε πρώτα το β (είναι το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα) και στη συνέχεια προσδιορίστε το a ή από την παραλληλία της με κάποια άλλη ευθεία ή από τις συντεταγμένες ενός σημείου από το οποίο περνά.

Δ. Αν θέλετε να ελέγξετε κατά πόσο ένα σημείο (κ,λ) ανήκει σε μια δεδομένη ευθεία, βάλτε όπου χ το κ και όπου ψ το λ : Αν σας προκύψει σωστή σχέση, τότε η ευθεία πράγματι διέρχεται από το (κ,λ) , διαφορετικά δεν περνά από εκεί.

Ε. Για να βρείτε σε ποια σημεία μια ευθεία της μορφής $y=ax+\beta$ τέμνει τους άξονες, βάζετε όπου ψ το 0 και λύνετε ως προς χ (έτσι βρίσκετε το σημείο τομής με τον $\chi\chi'$). Το σημείο τομής με τον $\psi\psi'$ είναι το $(0,\beta)$.

ΣΤ. Για να βρείτε το σημείο τομής δύο ευθειών μπορείτε να φτιάξετε τη γραφική τους παράσταση ή να εξισώσετε τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων της μορφής $y=ax+\beta$ και να λύσετε ως προς χ την εξίσωση που προκύπτει. Αφού βρείτε το χ , αντικαταστήστε την τιμή του σε μια από τις δύο εξισώσεις και βρείτε το ψ (Δεν έχει σημασία σε ποια, και οι δύο το ίδιο θα δώσουν, δοκιμάστε το!).

Ζ. Αν θέλετε να ελέγξετε κατά πόσον ένα σημείο (κ, λ) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας οποιασδήποτε συνάρτησης , κάντε ότι και στο βήμα Δ.

ΑΣ8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που περιγράφονται παρακάτω:

- Περνά από το $(0,0)$ και το σημείο $A(-2,3)$
- Περνά από το $(0,0)$ και το σημείο $B(3,-9)$
- Είναι παράλληλη στον $\chi\chi'$ και περνά από το A .
- Είναι παράλληλη στον $\gamma\gamma'$ και περνά από το B .
- Είναι παράλληλη της $y=2x-1$, περνά από το $\Gamma(0,4)$.
- Είναι παράλληλη της $y=-3x+1$, περνά από το $\Delta(0,-4)$.
- Είναι παράλληλη της $y=2x$, περνά από το $E(0,-3)$.
- Είναι παράλληλη της $y=2x-1$, περνά από το $O(0,0)$.

2. Να βρείτε το κ , σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Το σημείο $A(-3,2)$ ανήκει στην ευθεία $y=2x+\kappa$.
- Το σημείο $A(-3,2)$ ανήκει στην ευθεία $y=\kappa x+1$.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

γ. Το σημείο $B(-1, \kappa)$ ανήκει στην ευθεία $y = -2x + 3$.

δ. Το σημείο $\Gamma(\kappa, -4)$ ανήκει στην ευθεία $y = -3x - 1$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής ή το κ σε κάθε περίπτωση:

α. Περνά από το σημείο $A(-3, 2)$

β. Περνά από το σημείο $B(4, 2)$

γ. Το σημείο $\Gamma(\kappa, -3)$ ανήκει στην υπερβολή με εξίσωση $yx = -12$.

δ. Το σημείο $\Delta(-2, \kappa)$ ανήκει στην υπερβολή με εξίσωση $xy = 8$.

4. Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής των :

α. Ευθεία $y = 2x$ με ευθεία $y = -4$

β. Ευθεία $y = 2x - 3$ με ευθεία $y = x - 3$

γ. Ευθεία $y = 1 - x$ με ευθεία $y = -2x + 3$

δ. Υπερβολή $yx = 12$ με ευθεία $y = -3$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

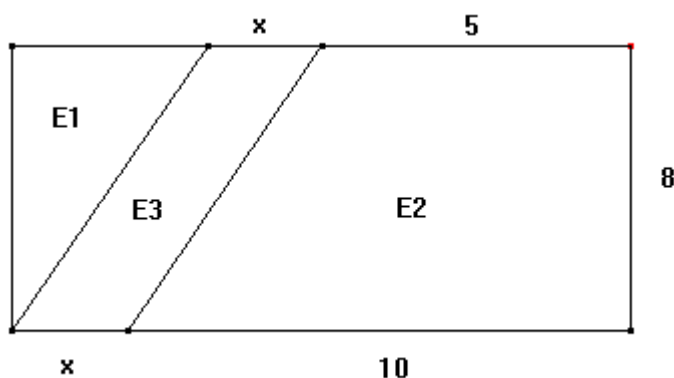
ΑΣ9. ΔΥΣΚΟΛΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΕΜΒΑΔΑ-ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Στο διπλανό σχήμα :

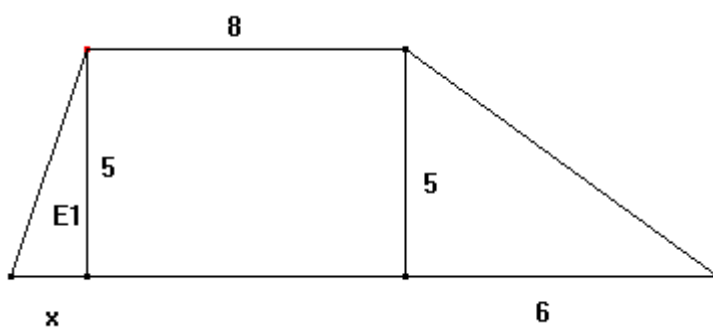
α) να υπολογίσετε τα εμβαδά των επιφανειών E_1 , E_2 και E_3 σαν συνάρτηση του x .

β) Να βρείτε την τιμή του x ώστε το E_3 να έχει το μισό εμβαδόν του E_2 .

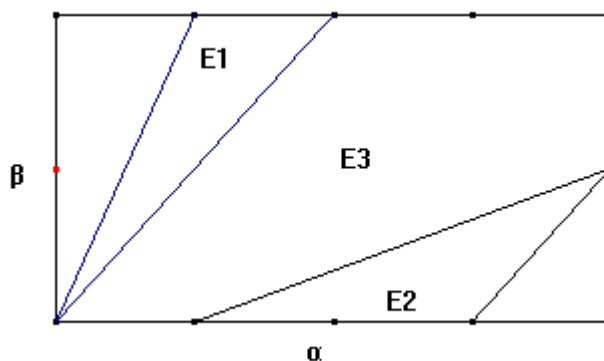
γ) Είναι δυνατόν το E_2 να είναι διπλάσιο από το E_1 ; Εξηγήστε.



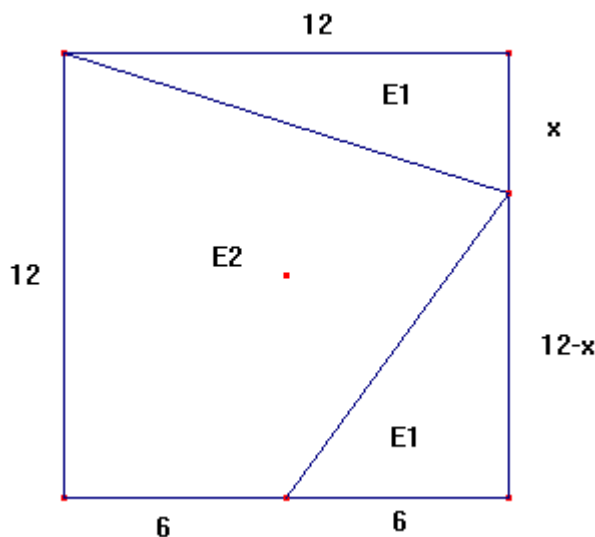
2. Στο διπλανό σχήμα, το εμβαδόν του τραπέζιου είναι 60m^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου E_1 καθώς και το μήκος x .



3. Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1 , E_2 και E_3 του διπλανού σχήματος, αν γνωρίζετε ότι τα τμήματα στα οποία χωρίζονται οι πλευρές α και β είναι όλα ίσα μεταξύ τους και το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 60m^2 .



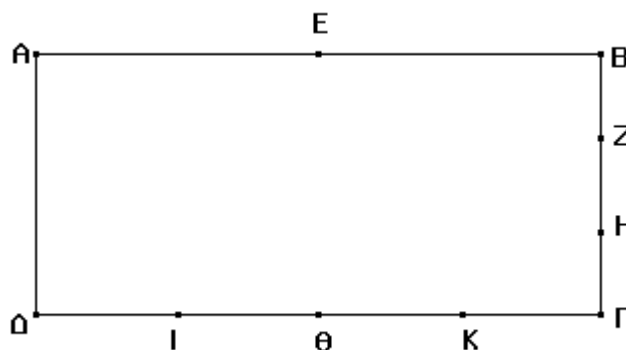
4. Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε το άθροισμα των εμβαδών των περιοχών με χαρακτηρισμό E_1 , να είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του E_2 .



Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

5. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που ακολουθεί, χωρίζω την βάση ΓΔ σε 4 ίσα μέρη, την πλευρά ΒΓ σε τρία ίσα τμήματα και το τμήμα ΑΒ σε δύο ίσα τμήματα. Να βρείτε τα εμβαδά των παρακάτω επίπεδων σχημάτων, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου είναι 64m^2 . Θεωρήστε ότι οι διαστάσεις είναι α, β .

(ΑΙΘ), (ΖΚΓ), (ΕΚΙ), (ΖΙΚ)
(ΗΘΓ), (ΑΙΘΒ), (ΕΒΓΙ),
(ΕΘΚΖ), (ΑΙΚΖΕ), (ΒΗΙΕ)



ΑΣ10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

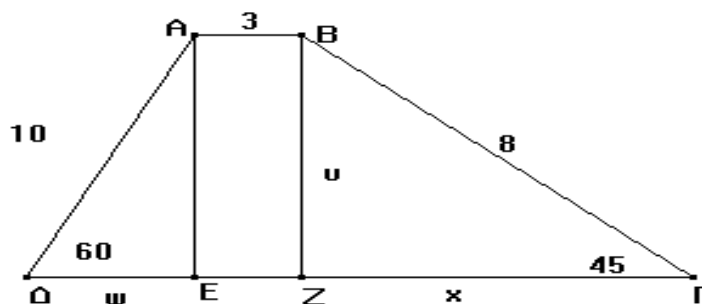
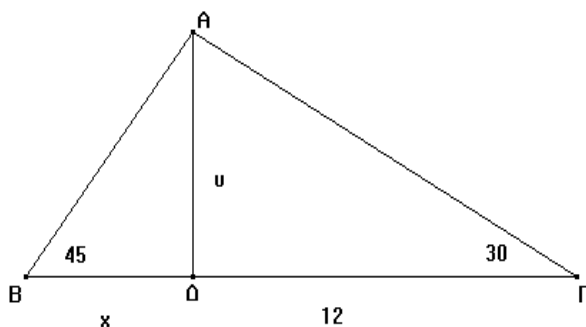
1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με $B\Gamma=15$ και μία κάθετη πλευρά του $A\Gamma$ ίση με 12, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\eta\mu\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \epsilon\phi\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma \cdot \eta\mu B}$$

2. Να βρείτε το ύψος και το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά $a=12$ cm.

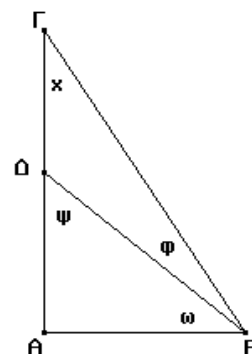
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $B\Gamma$ ίση με 8 και κάθετη πλευρά $AB=4\sqrt{3}$, να βρείτε την πλευρά $A\Gamma$ και την τιμή των γωνιών Β και Γ σε μοίρες.

4. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων, αφού πρώτα βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που σημειώνονται με μικρά γράμματα:



Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

5. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες αναφέρονται στο σχήμα:



$$\eta\mu\phi = \frac{\Gamma\Delta}{\text{Β}\Gamma} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{Α}\text{Β}}{\text{Β}\Delta}$$

$$\epsilon\phi\chi = \frac{\text{Α}\text{Β}}{\text{Β}\Gamma} \quad \sigma\upsilon\nu\psi = \frac{\text{Α}\Delta}{\text{Α}\text{Β}}$$

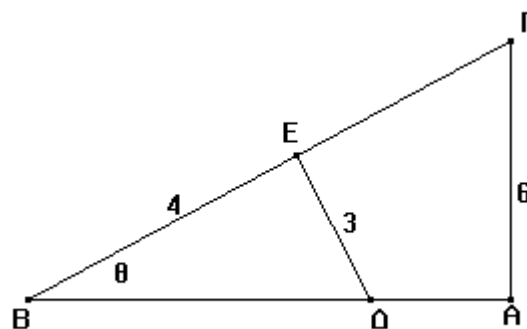
6. Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει βάσεις 8 και 14 cm και οξεία γωνία βάσης για την οποία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της ισούται με $(5/3)$ cm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τραπέζιου.

7. Στο διπλανό σχήμα, οι γωνίες Α και ΒΕΔ είναι ορθές.

α. Να υπολογίσετε το μήκος ΒΔ.

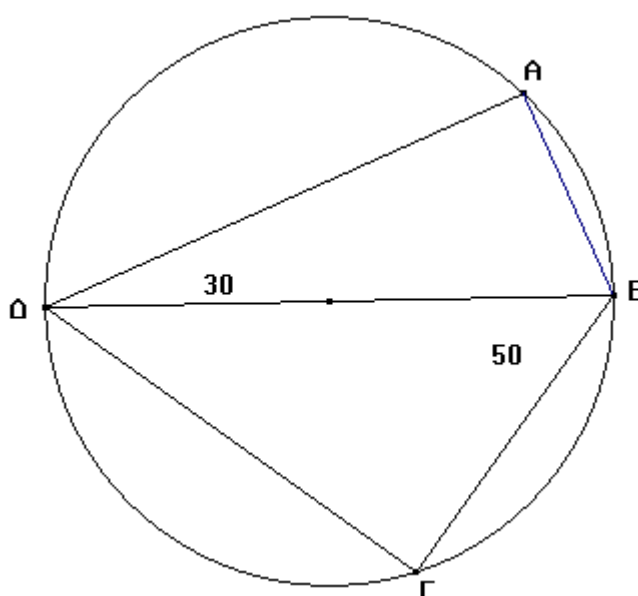
β. Να βρείτε τα ημθ, εφθ.

γ. Να υπολογίσετε τα μήκη ΑΔ και ΕΓ.

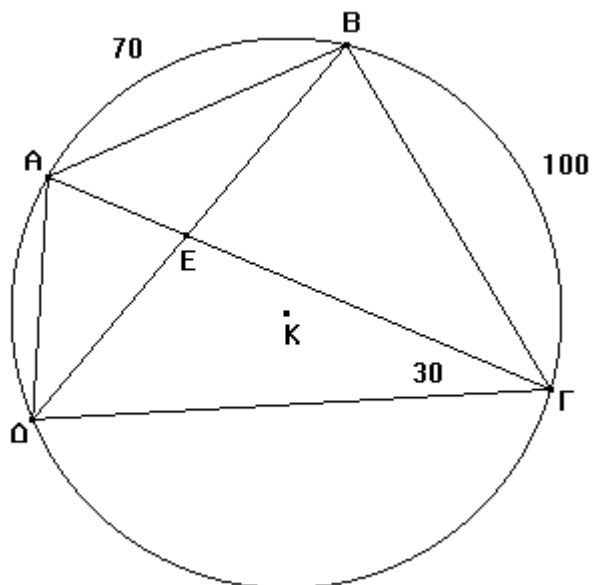


ΑΣ11. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ ΚΑΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ

1. Με δεδομένο ότι το ΒΔ είναι διάμετρος, υπολογίστε όλα τα τόξα και τις εγγεγραμμένες γωνίες που υπάρχουν στο σχήμα.

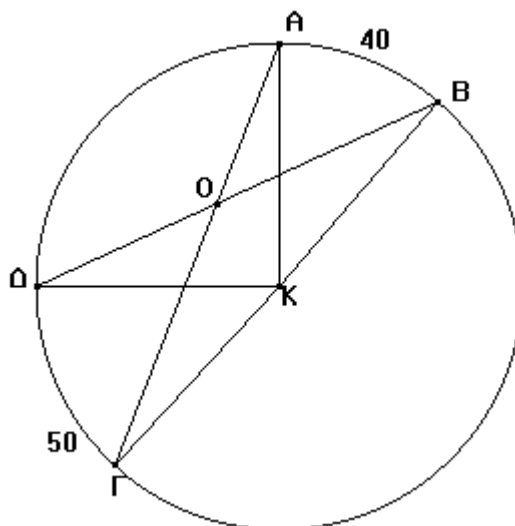


Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



2. Το τελικό ζητούμενο είναι να υπολογίσετε την γωνία $\Delta E A$. Θα χρειαστεί προφανώς να υπολογίσετε προηγουμένως κάποιες άλλες γωνίες ή τόξα.

3. Γνωρίζοντας τα τόξα $A B$ και $\Gamma \Delta$, δικαιολογήστε πρώτα πως η γωνία $A K \Delta$ είναι ορθή. Στη συνέχεια, υπολογίστε τις γωνίες $K A \Gamma$, $B \Delta K$, $A O B$.



ΑΣ12. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΗΚΟΣ-ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

1. Αν το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με 10π cm, να βρείτε την ακτίνα του καθώς και το μήκος ενός άλλου κύκλου με διάμετρο διπλάσια του αρχικού. Στη συνέχεια να βρείτε τα εμβαδά τους.
2. Αν τα μήκη δύο κύκλων διαφέρουν κατά 20π cm, να βρείτε πόσο διαφέρουν οι ακτίνες και οι διαμέτροί τους.
3. Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν διάμετρο 60 cm και το ποδήλατο θα διανύσει απόσταση ίση με 120π m. Να βρείτε πόσες στροφές θα κάνει κάθε τροχός. Αν η διάμετρος του τροχού ήταν 80 cm, πόσο % λιγότερες στροφές θα έκανε για την ίδια απόσταση;

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4. Σε ένα τρακτέρ, ο πίσω μεγάλος τροχός έκανε 200 στροφές ενώ ο μπροστινός 700 για να διανύσουν μια συγκεκριμένη απόσταση. Να βρείτε το λόγο των ακτίνων τους. Είναι ο ίδιος με το λόγο των διαμέτρων τους;
5. Η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου είναι 3cm. Να βρείτε το εμβαδόν του. Πόσο θα είναι το εμβαδόν ενός άλλου κυκλικού δίσκου με τη μισή ακτίνα και πόσο το εμβαδόν ενός τρίτου κυκλικού δίσκου με ακτίνα το 1/3 της αρχικής;
6. Αν ο λόγος των διαμέτρων δύο κύκλων είναι ίσος με 3, να βρείτε το λόγο των εμβαδών τους και το λόγο των μηκών τους.
7. Αν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι $25\pi \text{ cm}^2$, βρείτε την ακτίνα και το μήκος του. Αν διπλασιάσουμε το μήκος του κύκλου, πόσο μεγαλώνει το εμβαδόν του;
8. Να βρείτε το εμβαδόν του δακτυλίου που σχηματίζεται από δύο ομόκεντρους κυκλικούς δίσκους με ακτίνες 3 και 4cm αντίστοιχα.
9. Αν ο λόγος των ακτίνων δύο κυκλικών δίσκων είναι ίσος με 2/3 και ο μεγάλος κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν 90cm^2 , να βρείτε το εμβαδόν του μικρού κυκλικού δίσκου.
10. Αν ο λόγος των εμβαδών δύο κυκλικών δίσκων είναι ίσος με 16/25 και η ακτίνα του μικρότερου είναι 8cm, να βρείτε την ακτίνα του μεγαλύτερου.
11. Αν το εμβαδόν ενός δακτυλίου μεταξύ δύο ομόκεντρων κυκλικών δίσκων είναι ίσο με $39\pi \text{ cm}^2$ και η ακτίνα του μικρότερου είναι 5cm, να βρείτε την ακτίνα του μεγαλύτερου από τους δύο.

Απαντήσεις:

1. $R = 5\text{cm}$ $L = 20\pi \text{ cm}$

2. $R_1 - R_2 = 10\text{cm}$ $\delta_1 - \delta_2 = 20\text{cm}$

3. 200 στροφές, 150 στροφές, 25% 4. $\frac{L}{l} = \frac{7}{2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$

5. $9\pi \text{ cm}^2$, $\frac{9\pi}{4} \text{ cm}^2$, $\pi \text{ cm}^2$ 6. $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{R_1}{R_2} = 3$, $\frac{E_1}{E_2} = 9$

7. $R = 5\text{cm}$ $L = 10\pi \text{ cm}$, τετραπλάσιο εμβαδόν.

8. $7\pi \text{ cm}^2$

9. $40\pi \text{ cm}^2$

10. 10cm

11. 8cm

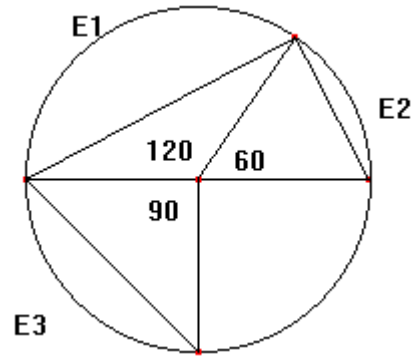
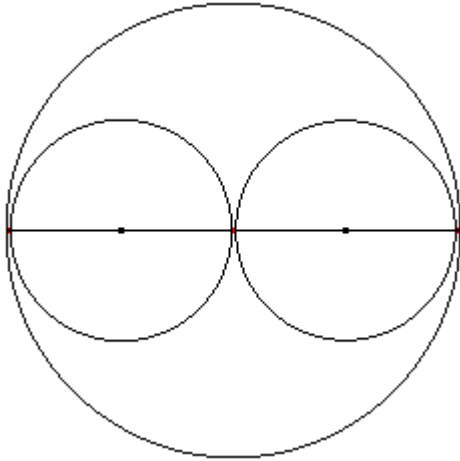
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΣ13. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΕΜΒΑΔΑ

Βρείτε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων επιφανειών:

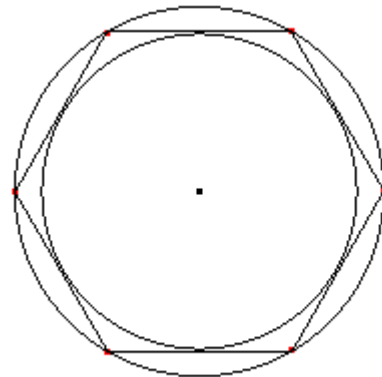
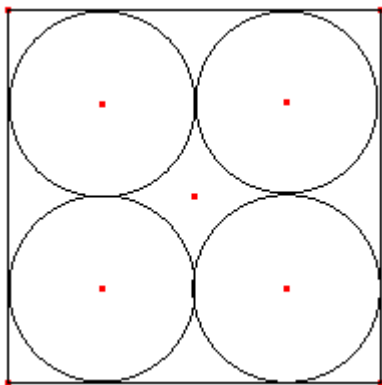
1. Δίνεται η ακτίνα του μεγάλου κύκλου $R=8\text{cm}$

2. Δίνεται η ακτίνα $R=6\text{cm}$

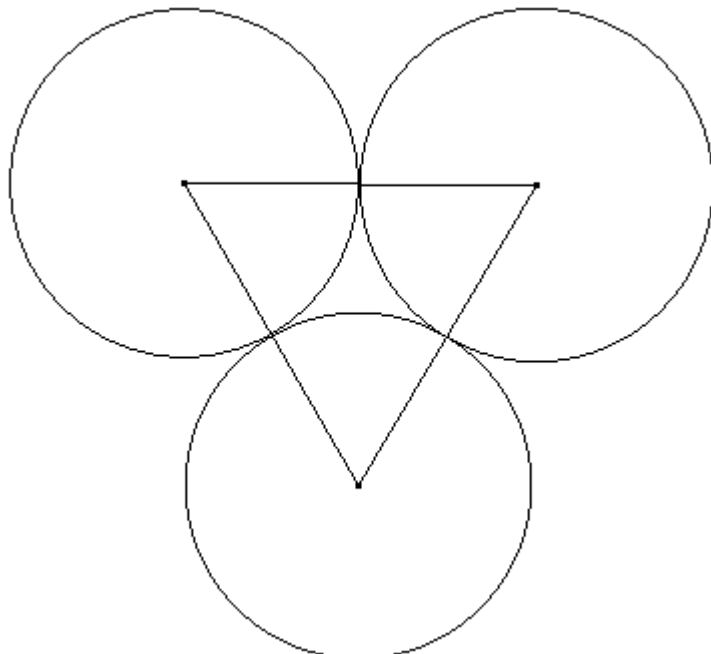


3. Πλευρά τετραγώνου $a=8\text{cm}$

4. Πλευρά εξαγώνου $a=6\text{cm}$



5. Ακτίνα κάθε
μεγάλου κύκλου
 $R=4\text{cm}$



ΑΣ14. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑ

1. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου είναι $80\pi \text{ cm}^2$, ενώ το ύψος του είναι 8 cm. Να βρείτε την ακτίνα, το εμβαδόν συνολικά του κυλίνδρου καθώς και τον όγκο του.
2. Η περίμετρος της βάσης ενός κυλίνδρου είναι ίση με $12\pi \text{ cm}$, ενώ το ύψος του είναι 10 cm. Να βρείτε την ακτίνα του, το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
3. Το συνολικό εμβαδόν των βάσεων ενός κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του. Αν το ύψος του είναι ίσο με 6 cm, να βρείτε την ακτίνα του, το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
4. Το εμβαδόν της βάσης ενός κυλίνδρου, ισούται με $16\pi \text{ cm}^2$. Το ύψος του ισούται με τα δύο τρίτα της ακτίνας βάσης. Να βρείτε την ακτίνα του, το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
5. Σε κύλινδρο όπου το ύψος του είναι διπλάσιο της ακτίνας βάσης του, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι ίσο με $64\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε την ακτίνα του, το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
6. Σε πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$), είναι $AB=8 \text{ cm}$, $A\Gamma=6 \text{ cm}$ ενώ το ύψος του είναι $u=10 \text{ cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του, το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
7. Σε πρίσμα με βάση ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος του το οποίο ισούται με την υποτείνουσα της βάσης, είναι $u = 10\sqrt{2} \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του, το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
8. Σε πρίσμα με βάση τετράγωνο, η διαγώνιος της βάσης και το ύψος του είναι ίσα με $10\sqrt{2} \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του, το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του.
9. Σε πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο και ύψος διπλάσιο από την πλευρά της βάσης, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι ίσο με 96 cm^2 . Να υπολογίσετε την πλευρά της βάσης του καθώς και το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο του πρίσματος.
10. Ένας κύλινδρος είναι τοποθετημένος εσωτερικά ενός τετραγωνικού πρίσματος ίσου ύψους, με τρόπο ώστε οι πλευρές του πρίσματος να εφάπτονται στον κύκλο. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 10 cm και το ύψος είναι 20 cm, να βρείτε τον όγκο του χώρου που βρίσκεται εσωτερικά του πρίσματος και εξωτερικά του τετραγώνου.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

1. $R = 5\text{cm}$, $E = 130\pi\text{cm}^2$, $V = 200\pi\text{cm}^3$
2. $R = 6\text{cm}$, $E = 192\pi\text{cm}^2$, $V = 360\pi\text{cm}^3$
3. $R = 6\text{cm}$, $E = 144\pi\text{cm}^2$, $V = 216\pi\text{cm}^3$
4. $R = 4\text{cm}$, $E = 80\pi\text{cm}^2$, $V = 96\pi\text{cm}^3$
5. $R = 4\text{cm}$, $E = 96\pi\text{cm}^2$, $V = 128\pi\text{cm}^3$
6. $B\Gamma = 10\text{cm}$, $E_{\pi} = 240\text{cm}^2$, $E_{ολ} = 288\text{cm}^2$, $V = 240\text{cm}^3$
7. $E_{\pi} \approx 428\text{cm}^2$, $E_{ολ} \approx 528\text{cm}^2$, $V \approx 705\text{cm}^3$
8. $E_{\pi} \approx 565,68\text{cm}^2$, $E_{ολ} \approx 765,68\text{cm}^2$, $V \approx 1414,28\text{cm}^3$
9. $a = 6\text{cm}$, $E_{\pi} = 216\text{cm}^2$, $E_{ολ} = 247,18\text{cm}^2$, $V = 187,06\text{cm}^3$
10. $V \approx 430\text{cm}^3$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

1° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ποια είναι τα βήματα λύσης μιας εξίσωσης με ένα άγνωστο; Πότε λέμε ότι μια εξίσωση είναι αδύνατη; Σε ποια περίπτωση λέμε ότι μια εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα; (18,19)
2. Ποιες μεταβολές μπορούμε να επιφέρουμε στα δύο μέλη μιας ανίσωσης χωρίς να αλλάξει η φορά και η ισχύς της; Σε ποια περίπτωση αντιστρέφουμε τη φορά μιας ανίσωσης; (31,32)

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Να γράψετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού. (41)
2. Ποιους αριθμούς ονομάζουμε άρρητους; Να γράψετε 3 άρρητους αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί περιλαμβάνουν τους ρητούς; Τους άρρητους; (46)
3. Πως μπορείτε με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε τμήματα με μήκη ίσα με $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ αντίστοιχα, αν έχει δοθεί το τμήμα με μήκος 1;

3° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τι γνωρίζετε για τη συνάρτηση $\psi = ax$; Τι ονομάζουμε κλίση μιας ευθείας αυτής της μορφής; (Σελ. 68)
2. Τι γνωρίζετε για τη συνάρτηση της μορφής $\gamma = ax + \beta$; Σε ποιο σημείο τέμνει τον $\psi\psi'$; Με ποια άλλη ευθεία είναι παράλληλη; (Σελ. 73)

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=a/x$; (Σελ. 80)

4° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τι είναι πληθυσμός; Τι είναι δείγμα; Πότε ένα δείγμα χαρακτηρίζεται αντιπροσωπευτικό; (80)
2. Πως βρίσκουμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων; Πως βρίσκουμε τη διάμεσο ενός τέτοιου συνόλου; (104,105)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ποιες είναι οι βασικές μονάδες μέτρησης εμβαδών; Με ποιες σχέσεις συνδέονται; (116)
2. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το εμβαδόν τετραγώνου, ορθογωνίου παραλληλογράμμου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου. (119,120)
3. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του.(128)

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου; Πώς σχετίζεται με την κλίση μιας ευθείας που περνά από το (0,0); (137)
2. Τι ονομάζουμε ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου; (142)
3. Τι ονομάζουμε συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου; (143)
4. Να εξηγήσετε γιατί οι τιμές του ημίτονου και του συνημίτονου μιας οξείας γωνίας είναι αριθμοί μεταξύ του 0 και του 1. (143)
5. Να κατασκευάσετε ένα πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° , των 45° και των 60° . (153)

3° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τι ονομάζουμε επίκεντρη γωνία; Τι σχέση έχει με το τόξο στο οποίο βαίνει; Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε δύο τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων;
2. Τι ονομάζουμε εγγεγραμμένη γωνία; Πως συνδέεται η τιμή της με την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία; (175,176)
3. Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό; Τι είναι και με τι ισούται η κεντρική του γωνία; Πώς σχετίζεται η κεντρική γωνία με τη γωνία του πολυγώνου; (Κατασκευάστε κατάλληλο σχήμα). (180-182)
4. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το μήκος κύκλου και το εμβαδόν κυκλικού δίσκου. (187,193)

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ποιες σχετικές θέσεις μπορούν να έχουν δύο ευθείες στο χώρο; Ποιες σχετικές θέσεις μπορούν να έχουν μια ευθεία με ένα επίπεδο στο χώρο; (202,203)
2. Πότε μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο; Τι ονομάζουμε απόσταση ενός σημείου από ένα επίπεδο; Να φτιάξετε σχετικό σχήμα. (203)
3. Με τι ισούται το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος και με τι το συνολικό εμβαδόν; Να σχεδιάσετε ένα πρίσμα με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (207)
4. Να σχεδιάσετε ένα κύλινδρο και να γράψετε τους τύπους που δίνουν το εμβαδόν της παράπλευρης και το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου. (208)
5. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν τον όγκο πρίσματος και κυλίνδρου. (213)
6. Τι είναι η πυραμίδα; Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το συνολικό εμβαδόν και τον όγκο μιας πυραμίδας. (218,219)
7. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο μιας σφαίρας. (229)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

A. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

1. $2(x-1) - 3(2-x) = 5(x+3)$ 2. $4x - 2(x-3) = 6 + 2x$ 3. $2x + 3(4-x) = x - 5(x+1)$

4. $\frac{2x-1}{2} - \frac{3(1+x)}{4} = 1-x - \frac{x+2}{2}$ 5. $\frac{3(2-x)}{2} - \frac{x-4}{6} = \frac{2-3x}{3} - 2x$

6. $\frac{x-1}{3} - x = 1 - \frac{x+1}{6}$ 7. $1 - \frac{4(2-x)}{3} - \frac{2x-1}{4} = \frac{2}{3}x - \frac{1-3x}{2}$

8. $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{2}(2-3x) + \frac{x-2}{4}$ 9. $\frac{3(1-x)}{2} - 2(x-1) = \frac{1}{4}(1-x) - \frac{x-2}{8}$

(Απαντήσεις: 1. Αδύνατη 2. Ταυτότητα

3. $x = -\frac{17}{3}$ 4. $x = \frac{5}{7}$ 5. $x = -\frac{9}{4}$ 6. $x = -\frac{7}{3}$ 7. $x = -\frac{11}{16}$ 8. $x = -\frac{1}{8}$ 9. $x = \frac{24}{25}$)

B. Να λύσετε και να συναληθεύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

$$\begin{array}{l} 1. \quad \begin{array}{l} 2(x-1) < 3(1-x) \\ 3(2-x) < x+14 \end{array} \\ 2. \quad \begin{array}{l} \frac{x-2}{3} - \frac{3x-1}{2} \geq 1 \\ \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} \geq 1 \end{array} \\ 3. \quad \begin{array}{l} 2 - \frac{x-1}{3} > x - \frac{2x+3}{4} \\ x - \frac{1-2x}{4} < 1 - \frac{1-x}{2} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4. \quad \begin{array}{l} -\frac{3x-1}{2} < 2(x+1) - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}(x-1) > \frac{3}{4}x - \frac{x-1}{12} \end{array} \\ 5. \quad \begin{array}{l} \frac{3-2x}{4} - \frac{1-x}{12} \leq 2 - \frac{x+1}{3} \\ \frac{3(x-1)}{2} + \frac{2x-1}{3} < \frac{1}{3} - \frac{2-x}{6} \end{array} \end{array}$$

(Απαντήσεις:

1. $-2 < x < 1$ 2. Δεν συναληθεύουν 3. $x < \frac{3}{4}$ 4. Η δεύτερη είναι αδύνατη 5. $-12 \leq x < \frac{11}{12}$
)

Γ. Σε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4cm, να υπολογίσετε:

1. Το ύψος του.
2. Το εμβαδόν του.
3. Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με διπλάσιο ύψος από εκείνο του τριγώνου και βάση 8 cm.

(Απαντήσεις: 1. $h = 2\sqrt{3}$ cm 2. $E = 4\sqrt{3}$ cm² 3. $E = 32\sqrt{3}$ cm²)

Δ. Οι διαστάσεις ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=8cm και ΒΓ=6cm, ενώ η γωνία Β=60°. Να υπολογίσετε:

1. Το ύψος του ΓΖ.
2. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.
3. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΒ.

(Απαντήσεις:

1. $\Gamma Z = h = 3\sqrt{3}$ cm 2. $E(ΑΒΓΔ) = 24\sqrt{3}$ cm² 3. $E(ΑΒΔ) = 12\sqrt{3}$ cm²)

Ε. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση ΓΔ είναι ίσες με 60° (ή κάθε μία από αυτές). Φέρνουμε τα ύψη ΑΖ και ΒΕ. Αν γνωρίζετε ότι $AZ = BE = 4\sqrt{3}$ cm και ΑΒ=10cm, να υπολογίσετε:

1. Την πλευρά ΑΔ.
2. Την βάση ΓΔ.
3. Το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΒΓΔ.
4. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

1. $AΔ = 8$ cm 2. $\GammaΔ = 18$ cm 3. $E(ΑΒΓΔ) = 56\sqrt{3}$ cm² 4. $E(ΑΒΓ) = 20\sqrt{3}$ cm²

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤ. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ γνωρίζουμε ότι $B=60^\circ$, $\Gamma=45^\circ$. Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ και δίνεται ότι $B\Delta=3\text{cm}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου και το εμβαδόν του.

(Απαντήσεις: $AB = 6\text{cm}$, $B\Gamma = 3 + 3\sqrt{3}\text{cm}$, $A\Gamma = 3\sqrt{6}\text{cm}$, $E = \frac{9\sqrt{3} + 27}{2}\text{cm}^2$)

Ζ. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=x+2$, $A\Gamma=2x$ και $B\Gamma=3x-2$, όπου το x είναι η λύση της εξίσωσης: $\frac{3x-4}{2} + x = \frac{x-1}{3} + 7$

1. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου.
2. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της μικρότερης από τις δύο οξείες γωνίες.

(Απαντήσεις:

Για $x = 4$, είναι $AB = 6\text{cm}$, $B\Gamma = 10\text{cm}$, $A\Gamma = 8\text{cm}$, ενώ $\eta\mu\Gamma = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{4}{5}$, $\epsilon\phi\Gamma = \frac{3}{4}$)

Η. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) δίνεται ότι $B\Gamma=15\text{cm}$ και $A\Gamma=12\text{cm}$.

1. Να υπολογίσετε την πλευρά AB .
2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .
3. Να αποδείξετε ότι: $1 + \epsilon\phi^2 B = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 B}$

Θ. Να αποδείξετε ότι:

1. $3 \cdot \eta\mu^2 60^\circ - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ = \frac{15}{4} \cdot \epsilon\phi^2 30^\circ$
2. $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ = \frac{3}{1 + \epsilon\phi^2 45}$
3. $\left(\frac{\eta\mu 60^\circ - \sigma\upsilon\nu 45^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ - \eta\mu 45^\circ} \right)^4 = 1$

Ι. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω πίνακες αντιστοιχούν σε ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά και να βρείτε τη σχέση που τα συνδέει κάθε φορά:

X	3	-1	-2	6
ψ	-2	6	3	-1

X	-4	3	6	-1
ψ	-8	6	12	-2

X	-1	2	-3	4
ψ	-3	6	-9	12

X	1/3	-1/2	-1/6	1/4
ψ	6	-4	-12	8

(Απαντήσεις:

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

α. $y = -\frac{6}{x}$, αντ. αναλ. β. $y = 2x$, αναλ.

γ. $y = 3x$, αναλ. δ. $y = \frac{2}{x}$ αντ. αναλ.

ΙΑ. Δίνεται το σημείο $A(3,-4)$ καθώς και η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y=3x-1$.

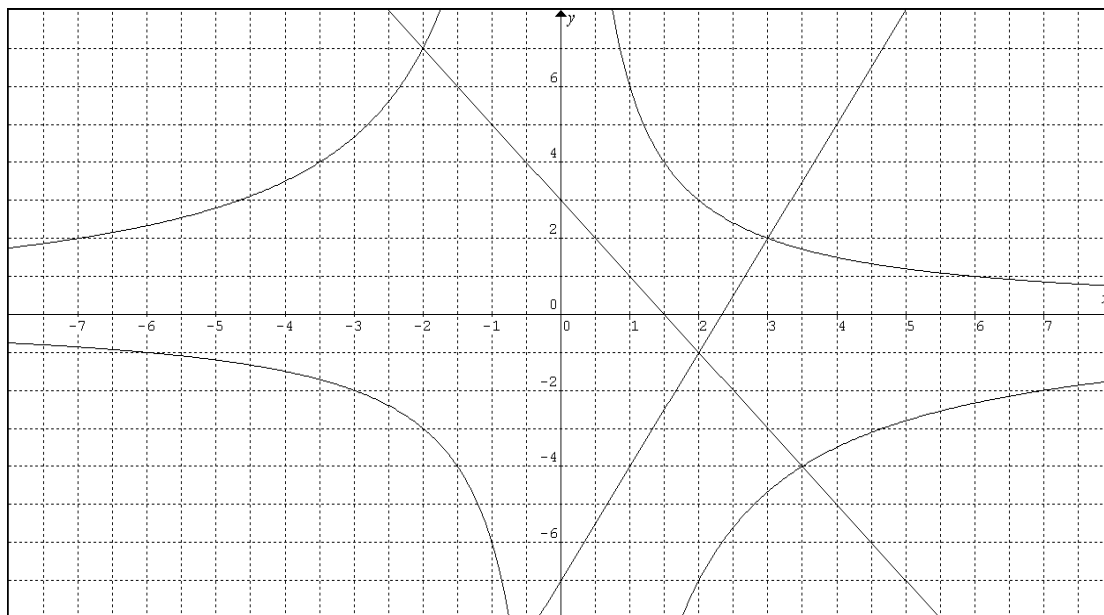
1. Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας που να διέρχεται από το A και να είναι παράλληλη της ευθείας (ϵ).
2. Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας η οποία να διέρχεται από το σημείο A και να τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο με τεταγμένη 5.

(Απαντήσεις: 1. $y=3x-13$ 2. $y=-3x+5$)

ΙΒ. Να κατασκευάσετε σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων, στο διάστημα που ζητείται κάθε φορά:

1. $y = 2x - 3, -1 \leq x \leq 3$.
2. $y = 3 - x, -2 < x \leq 4$.
3. $y = \frac{12}{x}, -4 \leq x \leq 4$

ΙΓ. Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών του παρακάτω σχήματος:



(Απαντήσεις: α. $y = \frac{6}{x}$ β. $y = -2x + 3$ γ. $y = 3x - 7$ δ. $y = -\frac{14}{x}$)

ΙΔ. Δίνονται οι παρατηρήσεις: $\alpha, \beta, 6, 3, 14, 2, 10$ όπου $\alpha < \beta$. Αν γνωρίζετε ότι η διάμεσος του δείγματος καθώς και η μέση τιμή είναι ίση με 8, τότε:

1. Να βρείτε τις τιμές α και β .

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2. Αν από όλες τις τιμές αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους, να βρείτε τη νέα μέση τιμή καθώς και τη νέα διάμεσο του δείγματος.

(Απαντήσεις: 1. $\alpha=8$, $\beta=13$ 2. Μέση τιμή=διάμεσο=0)

ΙΕ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να βρείτε τη μέση τιμή των μετρήσεων που αφορά τον αριθμό παιδιών μιας οικογένειας:

Αρ. Παιδιών	Συχνότητα(v)	Σχ. Συχν.	Σχ. Συχν. %	(Τιμή) επί (Συχνότητα)
0	4	0,16		
1				11
2			32	
3				
Σύνολο		1	100	

Στη συνέχεια να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής.

ΙΣΤ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ο οποίος δείχνει τις απαντήσεις στην ερώτηση «Πόσες φορές πήγατε στο γήπεδο σαν θεατές τον περασμένο μήνα» που υποβάλλαμε σε κάποιους μαθητές Γυμνασίου. Στη συνέχεια να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος:

Τιμή μεταβ.	Συχνότητα(v)	Σχ. Συχν.	Σχ. Συχν. %	(Τιμή) επί (Συχνότητα)
0			36	
1		0,4		20
2		0,16		
3				
Σύνολο		1	100	

Στη συνέχεια να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής.

ΙΖ. Το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με 12π cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου καθώς και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου. Αν τριπλασιάσαμε την ακτίνα, πόσο θα μεγάλωνε το μήκος και πόσο το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου;

(Απαντήσεις: $R = 6$ cm, $E = 36\pi$ cm², $L = 36\pi$ cm, $E = 324\pi$ cm²)

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΘ. Σε ημικύκλιο διαμέτρου $AB=10\text{cm}$, παίρνουμε ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε το τόξο $A\Gamma$ να είναι διπλάσιο του τόξου ΓB .

1. Να υπολογίσετε τα τόξα $A\Gamma$ και ΓB σε μοίρες και ακτίνα.
2. Να δικαιολογήσετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τα μήκη των χορδών $A\Gamma$ και ΓB .
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται μέσα στο ημικύκλιο αλλά έξω από το τρίγωνο $AB\Gamma$.

(Απαντήσεις:

$$1. A\Gamma = 120^\circ, \Gamma B = 60^\circ \quad 2. \Gamma B = 5\text{cm}, A\Gamma = 5\sqrt{3}\text{cm} \quad 3. E = \left(\frac{25\pi - 25\sqrt{3}}{2} \right) \text{cm}^2)$$

ΙΗ. Σε κύκλο διαμέτρου $AB=10\text{cm}$, εγγράφουμε κανονικό πολύγωνο του οποίου η κεντρική γωνία ισούται με 60° .

1. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.
2. Να βρείτε το εμβαδόν του πολυγώνου.
3. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου αλλά έξω από το κανονικό πολύγωνο.

(Να λύσετε την ίδια άσκηση αν η κεντρική γωνία ισούται με 90° ή 120°)

(Απαντήσεις: 1. $n = 6$ 2. $E = \frac{150\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$ 3. $E = \left(25\pi - \frac{150\sqrt{3}}{4} \right) \text{cm}^2$)

Κ. 1. Αν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι $25\pi\text{cm}^2$, βρείτε την ακτίνα και το μήκος του. Αν διπλασιάσουμε το μήκος του κύκλου, πόσο μεγαλώνει το εμβαδόν του;

2. Να βρείτε το εμβαδόν του δακτυλίου που σχηματίζεται από δύο ομόκεντρους κυκλικούς δίσκους με ακτίνες 3 και 4cm αντίστοιχα.

(Απαντήσεις: 1. $R = 5$, $L = 10\pi$, $E = 100\pi\text{cm}^2$ 2. $E = 7\pi\text{cm}^2$)

ΚΑ. 1. Αν ο λόγος των εμβαδών δύο κυκλικών δίσκων είναι ίσος με $16/25$ και η ακτίνα του μικρότερου είναι 8cm, να βρείτε την ακτίνα του μεγαλύτερου.

2. Αν το εμβαδόν ενός δακτυλίου μεταξύ δύο ομόκεντρων κυκλικών δίσκων είναι ίσο με $39\pi\text{cm}^2$ και η ακτίνα του μικρότερου είναι 5cm, να βρείτε την ακτίνα του μεγαλύτερου από τους δύο.

(Απαντήσεις: 1. $R = 10\text{cm}$ 2. $R = 8\text{cm}$)

ΚΒ. Αν το εμβαδόν της βάσης ενός κυλίνδρου είναι ίσο με $36\pi\text{cm}^2$ και το ύψος του είναι διπλάσιο της ακτίνας της βάσης του, να υπολογίσετε:

- α. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του
- β. Το ολικό εμβαδόν του.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

γ. Αν μέσα στον παραπάνω κύλινδρο τοποθετούσαμε μια σφαίρα έτσι ώστε να εφάπτεται των πλευρών του, να βρείτε τον λόγο του όγκου της σφαίρας προς τον όγκο του κυλίνδρου.

(Απαντήσεις: α. $E_{\text{π.ρ.}} = 144\pi \text{ cm}^2$ β. $E_{\text{ολικό}} = 216\pi \text{ cm}^2$ γ. $\lambda = \frac{2}{3}$)

ΚΓ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που περιγράφονται παρακάτω:

α. Περνά από το (0,0) και το σημείο A(2,-3) ($y = -\frac{3}{2}x$)

β. Περνά από το (0,0) και το σημείο B(2,-6) ($y = -3x$)

γ. Είναι παράλληλη στον $\chi\chi'$ και περνά από το A. ($y=-3$)

δ. Είναι παράλληλη στον $\gamma\gamma'$ και περνά από το B. ($x=2$)

ε. Είναι παράλληλη της $y=2x-15$, περνά από το Γ(0,7). ($y=2x+7$)

στ. Είναι παράλληλη της $y=-3x+11$, περνά από το Δ(0,-2). ($y=-3x-2$)

ζ. Είναι παράλληλη της $y=2x$, περνά από το E(0,-8). ($y=2x-8$)

η. Είναι παράλληλη της $y=5x-1$, περνά από το O(0,0). ($y=5x$)

ΚΔ. Να βρείτε το κ, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Το σημείο A(-4,2) ανήκει στην ευθεία $y=2x+\kappa$. ($\kappa=10$)

β. Το σημείο A(-4,2) ανήκει στην ευθεία $y=\kappa x+6$. ($\kappa=1$)

γ. Το σημείο B(-2,κ) ανήκει στην ευθεία $y=-2x+5$. ($\kappa=9$)

δ. Το σημείο Γ(κ,-3) ανήκει στην ευθεία $y=-3x-6$. ($\kappa=-1$)

ΚΕ. Σε μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα, η διαγώνιος της βάσης της ισούται με

$8\sqrt{2} \text{ m}$. Αν η παράπλευρη ακμή της πυραμίδας είναι ίση με 9m, να υπολογίσετε:

α. Την πλευρά της βάσης, το ύψος και το παράπλευρο ύψος της.

β. Την συνολική παράπλευρη επιφάνεια.

γ. Τον όγκο της πυραμίδας.

α. πλευρά 8m, ύψος 7m, παράπλευρο ύψος $\sqrt{65} \text{ m}$.

Απαντήσεις: β. Εμβαδόν παρ / ρης = $16 \cdot \sqrt{65} \text{ m}^2$

γ. Όγκος = $\frac{448}{3} \text{ m}^3$