ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ 1η

Α. Να συμπληρώσετε την ταυτότητα: $(\beta-\alpha)^3=$

και στη συνέχεια να την αποδείξετε.

Β. Να μεταφέρετε συμπληρωμένες στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν $\alpha\cdot\beta=0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$
2. Αν $\alpha\cdot\beta\neq0$ τότε $\alpha\neq0$ και $\beta\neq0$
3. Αν $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$

Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

$(\alpha+\beta)^2=$ $\qquad$ $(\alpha+\beta)^3=$ $\qquad$ $\alpha^2-\beta^2=$

ΘΕΩΡΙΑ 2η

Α. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω, με $0^0<\omega<180^0$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ και $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Β. Αν η γωνία φ είναι οξεία, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$\eta\mu(180^0-\varphi)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^0-\varphi)\cdot\varepsilon\varphi\left(180^0-\varphi\right)=\eta\mu\varphi\left(-\sigma\upsilon\nu\varphi\right)\cdot\left(-\varepsilon\varphi\varphi\right)>0$$

Γ. Είναι δυνατόν για μια γωνία ω να ισχύουν ότι: $\eta\mu\omega=\dfrac{1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{2}{3}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Όχι, γιατί πρέπει $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ ενώ οι συγκεκριμένες τιμές δίνουν 5/9)

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y=x^2+\kappa x+\lambda$, με $\lambda,\kappa\in\mathbb{R}$ η οποία τέμνει τον άξονα χχ΄ στα σημεία με τετμημένες χ=2 και χ=3.

Α. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ.

Β. Για κ=-5 και λ=6, να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής την εξίσωση του άξονα συμμετρίας καθώς και το σημείο τομής της με τον άξονα yy΄.

Λύση: Α. Η παραβολή περνάει από τα σημεία Α(2,0) και Β(3,0) συνεπώς ισχύουν : $\begin{cases}4+2\kappa+\lambda=0\\9+3\kappa+\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\kappa+\lambda=-4\\3\kappa+\lambda=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=-5\\\lambda=6\end{cases}$

Β. Η κορυφή έχει συντεταγμένες

$K\left(\frac{5}{2},\frac{1}{4}\right)$, άξονας η $\chi=\frac{5}{2}$, τέμνει τον ψψ΄ στο (0,6).

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Α. Δίνεται η παράσταση $K=\frac{(x+2)^3-4(x+3)^2-x^3+14}{(2x-1)^2-2x(x-2)-3}$. Να αποδείξετε ότι η παράσταση Κ μπορεί να γραφτεί στη μορφή: $K=\frac{2x^2-12x-14}{2x^2-2}$

Β. Για ποιες τιμές του χ ορίζεται η παράσταση Κ; Να απλοποιήσετε την παράσταση και να δείξετε ότι $K=\frac{x-7}{x-1}$.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $K=\frac{x+3}{x-5}+1$

Λύση: Α,Β. Εκτελούμε τις πράξεις :

$$\frac{x^3+6x^2+12x+8-4x^2-24x-36-x^3+14}{4x^2-4x+1-2x^2+4x-3}=\frac{2x^2-12x-14}{2x^2-2}=\frac{2(x+1)(x-7)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x-7}{x-1}$$

Ζητούμε $x\neq 1$ και $x\neq -1$

Γ.

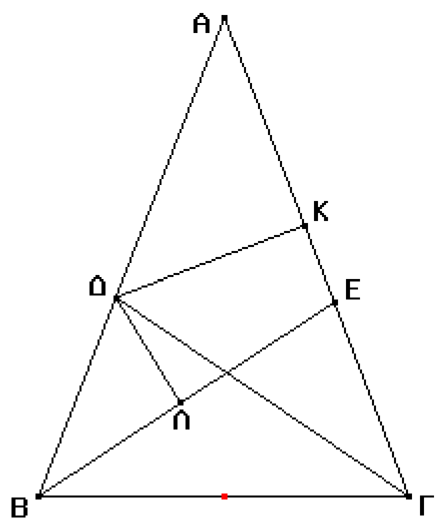
$$\frac{x-7}{x-1}=\frac{x+3}{x-5}+1 \Leftrightarrow x^2-12x+35=x^2+2x-3+x^2-6x+5 \Leftrightarrow x^2+8x-33=0$$

άρα $x=3$ ή $x=-11$

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΕ και ΓΔ των γωνιών Β και Γ. Στη συνέχεια φέρνουμε τις αποστάσεις ΔΚ και ΔΛ του Δ από τις πλευρές ΑΓ και ΒΕ αντίστοιχα.

1. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΔ
2. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΛ και ΚΔΓ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους.
3. Να δικαιολογήσετε ότι το τρίγωνο ΒΟΓ είναι



ισοσκελές.

Λύση: Α. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ. Έχουν ίσες τις γωνίες ΕΒΓ=ΔΓΒ (μισά ίσων γωνιών) και Β=Γ. Επίσης η πλευρά ΒΓ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα, άρα είναι ίσα.

Β. Τα τρίγωνα έχουν ίσες τις γωνίες ΔΒΛ και ΚΓΔ (μισά ίσων γωνιών) και είναι ορθογώνια, συνεπώς έχουν τις πλευρές τους ανάλογες άρα :

$$\frac{\Lambda\Delta}{\mathrm{K}\Delta}=\frac{\Lambda\mathrm{B}}{\mathrm{K}\Gamma}=\frac{\Delta\mathrm{B}}{\Delta\Gamma}$$

Γ. Οι γωνίες της βάσης του τριγώνου ΟΒΓ είναι ίσες , ως μισά ίσων γωνιών, συνεπώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές.