

ΘΕΜΑΤΑΚΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Α. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{a^2(a-1) - a^2(\beta-1)}{\alpha(\alpha^2-1) + \alpha(\alpha\beta+1)}$

Β. Να κάνετε τα ίδιο για την παράσταση: $B = \frac{\alpha(x-\beta) + \beta(x+a)}{a(x+\beta) - \beta(x+a)}$

Γ. Να αποδείξετε ότι: $A \cdot B = 1$ και ότι $B - A = \frac{4a\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$

2. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 - 5x}$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

Β. Να απλοποιήσετε την παραπάνω παράσταση.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $A^2 - 4 \cdot A + 4 = 0$, όπου A η αρχική παράσταση.

3. Α. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-2}{x+5} + \frac{2x+1}{11-x} = 1$

Β. Αν α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη λύση της παραπάνω εξίσωσης, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\beta+1)x^2y^2 - \alpha xy - (a+\beta)$

4. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} 2\alpha x - 3y\beta = \alpha + 1 \\ \beta y - \beta + 3\alpha x = 0 \end{cases}$$

Αν γνωρίζετε ότι μια λύση του συστήματος ως προς x και y είναι το $(1, -2)$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

5. Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: $y^2 - y - 2$, $y^2 - 2y$

Β. Για ποιες τιμές του y ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\frac{y+1}{y^2-y-2} \quad \frac{1}{y^2-2y}$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y^2-2y} = 0$

6. Α. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $K = \frac{2-4x}{x^2-2x+1} \cdot \frac{1-x}{8x-4}$

Β. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\Lambda = \frac{2x-6}{2x^2-3x} \cdot \frac{4x^2-9}{9-3x}$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $K + \Lambda = \frac{5}{12}$

7. Α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{y}{x} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{y^2}{x^2-xy} - \frac{x(x+y)}{2y(y-x)} = \frac{x}{2y}$

Β. Να αποδείξετε ότι: $\frac{x^3 + 2x^2y - y^3}{(x+y)^3} + \frac{2y}{x+y} = 1 + \frac{xy}{x^2 + 2xy + y^2}$

8. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά μήκος ΜΔ=ΑΜ, προς το μέρος του Μ. Να αποδείξετε ότι:
- $AB=ΓΔ$ και β. Τα Α και Δ ισαπέχουν από το τμήμα ΒΓ.
9. Α. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2(x-3) - x(x+1) = x(2x^2 + x - 5)$
- Β. Αν α,β οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης με $α < β$, να λύσετε το σύστημα:
- $$\begin{cases} (α+2)x - 5y = 16 \\ x + 6βy = -3 \end{cases}$$
10. Δίνεται ότι: $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$, $180^\circ < \omega < 270^\circ$.
- Να υπολογίσετε τις τιμές των $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\varphi\omega$.
 - Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
- $$A = \eta\mu(180^\circ - \omega) + \frac{1}{\epsilon\varphi(180^\circ - \omega)} - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)$$
11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από ένα σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρνουμε ΔΕ παράλληλη προς τη ΒΓ, όπου Ε σημείο της πλευράς ΑΓ. Δίνονται επίσης ότι: $ΑΔ = 3x - 7$, $ΔΒ = x$, $ΑΕ = x + 1$, $ΕΓ = 2x$.
Να βρείτε την τιμή του x.
12. Δίνεται η παράσταση $A = 2x^2(x-3) - x(1-2x^2) + 7x(x-1) - 2(1-4x)$
- Να εκτελέσετε τις πράξεις και στη συνέχεια να παραγοντοποιήσετε την παράσταση.
 - Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.
 - Αν α είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης (β) και μ η μικρότερη, να λύσετε την εξίσωση:
- $$x^α + 4\mu x = \alpha - 3$$
13. α. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$
- β. Αν το ημίτονο μιας οξείας γωνίας ω ισούται με μια από τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε τη γωνία καθώς και το συνημίτονο και την εφαπτομένη της ίδιας γωνίας.
14. Δίνεται η εξίσωση: $ax^3 - x^2 - (a + \beta)x + 2a = 0$.
- Αν γνωρίζετε ότι οι αριθμοί -2 και 2 είναι ρίζες της εξίσωσης, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.
 - Για τις τιμές των α και β που βρήκατε, να λύσετε την αρχική εξίσωση
15. Έστω ότι για μια οξεία γωνία φ ισχύει ότι $\eta\mu\phi = 3/5$
- Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\phi$ και την $\epsilon\varphi\phi$.
 - Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\frac{\eta\mu^2(180 - \phi) - \sigma\upsilon\nu^2(180 - \phi)}{7\epsilon\varphi(180 - \phi)}$
 - Αν η γωνία ω είναι συμπληρωματική της φ, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.
16. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y = x^2 - 4x + k$, η οποία έχει ελάχιστη τιμή $y = -4$.
- Να βρείτε την τιμή του k και να φτιάξετε τη γραφική της παράσταση.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της με τον οριζόντιο άξονα.
 - Να βρείτε την τιμή του α, ώστε το σημείο $A(\alpha, 2)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της παραβολής.