ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (4-2014)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η f΄(x) διατηρεί πρόσημο στο $(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Α2. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο [α,β];

Α3. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος δύο μιγαδικών.

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «λάθος» τις προτάσεις που ακολουθούν:

α. Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων μεταξύ τους συναρτήσεων, έχουν κοινά σημεία πάνω στην ευθεία y-x=0.

β. Αν z και w μιγαδικοί, ισχύει η ισοδυναμία: $|z|=|w|\Leftrightarrow z=w$

γ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο x_o, ισχύει η σχέση:

$$\left[2f(x_o)\right]'=2f'(x_o)$$

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο R, ισχύει ότι:

$$\left[\int_0^{-x}f(t)dt\right]'=-f(-x),\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

ε. Αν για μια συνάρτηση ορισμένη σε όλο το R, ισχύει ότι $f(x)\le a,\ a\in\mathbb{R}$,τότε το α είναι η μέγιστη τιμή της f.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2\ln x+x^2-1,\ x\in(0,+\infty)$

Β1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

Β2. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Β3. Αν α και β θετικοί πραγματικοί για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$\left(\frac{a}{\beta}\right)^2=e^{(\beta-a)(\beta+a)}$, να αποδείξετε ότι α=β.

Β4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των

$g(x)=2\ln x\ \text{και}\ h(x)=1-x^2$, τέμνονται σε ένα μόνο κοινό σημείο και μάλιστα κάθετα (δηλαδή οι εφαπτόμενες τους στο κοινό σημείο είναι κάθετες μεταξύ τους).

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$f(x)=e^{x-1}-\ln x$, *καθώς και οι μιγαδικοί* z,w *με* $z\neq 0,\ w\neq 3+4i$ *για τους οποίους ισχύει η σχέση*: $e^{|z-3-4i|}+e^{|w|}-2e\leq \ln\left(|z-3-4i|\cdot|w|\right)^{e}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $|z-3-4i|=|w|=1$

Γ3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και στη συνέχεια τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-\overline{z}|$.

Γ4. Αν z,z_1,z_2 μιγαδικοί που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του Γ3, για τους οποίους επιπλέον γνωρίζουμε ότι $|z_1-z_2|=2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει η σχέση: $e^2+\int_1^x \frac{f'(t)}{t+1}dt=\int_1^x e^{t-f(t)}dt+\int_{x+1}^{x+2} e^{f(t-x)}dt,\ \ x>0.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x+x,\ \ x\in(0,+\infty)$

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\eta\mu\frac{1}{x}+2}$

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^x f(t)dt < x\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}+\ln 2,\ \ \text{για κάθε}\ \ x>1.$$

Δ4. Έστω Μ(α, f(α)), α>1, σημείο της καμπύλης f και (ε) η εξίσωση εφαπτομένης της στο Μ. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ δίνεται από τη σχέση α΄(t)=2α(t), και Ε(α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την (ε) και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=α, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Ε(α) τη χρονική στιγμή που η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΑΝΑ ΘΕΜΑ

Α1	Α2	Α3	Α4	Β1	Β2	Β3	Β4	Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4
9	3	3	10	7	5	7	6	6	7	6	6	7	5	7	6