ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (3° του 2014)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Α2. Πότε ένα σημείο $A(x_o, f(x_o))$ καλείται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Οι μιγαδικοί αριθμοί των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον ίδιο κύκλο, έχουν ίσα μέτρα.
2. Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων μεταξύ τους συναρτήσεων, έχουν κοινά σημεία πάνω στην ευθεία ψ=χ.
3. Αν ισχύει ότι f(x)>g(x) για κάθε χ πραγματικό, τότε, και με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια, ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) > \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$.
4. Αν για μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ισχύει ότι $f'(x)$ είναι γνήσια αύξουσα για κάθε χ πραγματικό, τότε είναι και $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό χ.
5. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και δεν μηδενίζεται γα καμιά τιμή από το διάστημα [α,β], τότε ισχύει $\int_\beta^\alpha f(x)dx < 0$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο με τύπο: $P(z) = z^3 + z^2 - az + \beta, \quad \mu\varepsilon \quad a, \beta \in \mathbb{R}$.

Ονομάζουμε z_1, z_2, z_3 *τις ρίζες του, με* $\mathrm{Im}(z_1) < \mathrm{Im}(z_3) = 0 < \mathrm{Im}(z_2)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι α=1, β=2 και να βρείτε τις z_2, z_3 αν γνωρίζετε ότι:

$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Β2. Να αποδείξετε ότι: $z_1^3 + z_2^3 = z_3$

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|w - 2z_1 - i\sqrt{3}| + |\overline{w} + 2z_2 - i\sqrt{3}| = 2|z_3|$ και να βρείτε ποιοι από τους μιγαδικούς w έχουν το μέγιστο μέτρο.

Β4. Να δείξετε ότι: $z_1^{2014} + z_2^{2014} < 0$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης , καθώς και το πλήθος των ριζών της.

Γ2. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) μεταξύ της καμπύλης f , της οριζόντιας ασύμπτωτης της συνάρτησης f και των ευθειών με εξισώσεις χ=λ και χ=3 , όπου 2<λ<3 και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to 2} E(\lambda)$.

Γ3. Αν η τιμή του λ μειώνεται με ρυθμό 1 μ/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Ε(λ) τη χρονική στιγμή που το λ=2,5 μ.

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x xf(t)\,dt}{\left(e^x-1\right)^2}$

ΘΕΜΑ Δ

Η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει η σχέση:

$\dfrac{1}{2}\int_0^x f'(t)\left(1+t^2\right)dt=\dfrac{e^x-1}{2}-\int_0^x tf(t)dt$, ενώ η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο 1.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται , να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της και να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\frac{e}{2}} f^{-1}(x)dx=\dfrac{e}{2}$

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $\int_{x^2+1}^{e^{x^2}} f(t)\,dt=0$

Δ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{\ln x}^{x} f(t)\,dt\right)$

Α1	Α2	Α3	Β1	Β2	Β3	Β4	Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4
10	5	10	8	5	6	6	7	7	7	4	4	6	7	8