ΘΕΜΑΤΑΚΙΑ ΓΕΝΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\ln x-\dfrac{2-x}{2x}$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.
2. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$, έχει ακριβώς μία λύση για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.
3. Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}\left(\ln 2-\sqrt{e}-f(x)\right)=2$.
4. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}+f^{-1}(x)}$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$xf(x)+\eta\mu 3x=2x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x},\ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\neq 0.$$

1. Να βρείτε τον τύπο της f(x).
2. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\quad\kappa\alpha\iota\quad\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα χχ΄ σε δύο ακριβώς σημεία.
4. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης $g(x)=\eta\mu 2x\cdot f(x)$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνήσια μονότονη, έχει σύνολο τιμών το R και f(2)=2. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=(f\circ f)(x)-f^3(x)$$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.
2. Να δείξετε ότι $\left(g\circ f^{-1}\right)(x)=f(x)-x^3$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $f(x)-x^3=-6$
3. Αν f(1)=3, να βρείτε τη μονοτονία των f και g.
4. Αν υπάρχει θετικός k τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(k)+f(2k)=3k$, να δείξετε ότι η εξίσωση:

$\dfrac{f(x)-k}{x-2k}=\dfrac{f(x)-2k}{x-k}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (k,2k).

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει η σχέση: $|z-5i|=6+|z+5i|$, να βρείτε:

1. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.
2. Αν f(x) είναι η συνάρτηση που έχει την ίδια γραφική παράσταση με τον γεωμετρικό τόπο του πρώτου ερωτήματος, να βρείτε τον τύπο της καθώς και την μέγιστη τιμή της, έστω y_o.

3. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση με τύπο:

$g(x) = x + \sqrt{x^2 + ax - 1}$, $x \in \mathbb{R}$ να έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση: $y=y_0$

ΘΕΜΑ Ε

Έστω μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση:

$f(a) < f'(x) < f(a+1),\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x,\ a \in \mathbb{R}.$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (α-1, α).
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τιμές ξ_1 , ξ_2 στο (α-1,α) τέτοιες ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{f(a)}{f'(\xi_2)} - \frac{f(a-1)}{f'(\xi_1)} = 1$$

ΘΕΜΑ Ζ

Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη για κάθε χ>0 για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$g(x) + \lambda x + 4 \le \frac{2}{x}$, $\quad g(x) \ge -4 - 6x + \frac{1}{4x}$, $\ x > 0$ και g(1)=-2-λ, g ΄(1)=-8.

1. Βρείτε το λ.
2. Βρείτε – αν υπάρχει – πλάγια ασύμπτωτη για την συνάρτηση g.
3. Υπολογίστε το : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x) + \eta\mu x + 4}{xg(x) + 6x^2 + \ln x}$.

ΘΕΜΑ Η

1. Αν για τις συνεχείς στο [α,β] συναρτήσεις h(x),g(x) ισχύει: $h(x) > g(x)$, να δείξετε ότι:

$\int_a^\beta h(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx,\ \ x \in [a, \beta].$

2. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει: $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(0) = 0,$ τότε:

i. Να υπολογίσετε την f ΄ (x) σαν συνάρτηση της f(x).

ii. Να δείξετε ότι: $\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x > 0.$

iii. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον χχ΄ και τις ευθείες x=0, x=1, να δείξετε ότι: $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} \cdot f(1).$

ΘΕΜΑ Θ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^5 + x^3 + x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

1. Να βρείτε την μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα της συνάρτησης f. Να δείξετε ακόμα ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
2. Να δείξετε ότι: $f(e^x) \ge f(1+x).$
3. Να βρείτε την εφαπτομένη της συνάρτησης f στο σημείο (0, f(0)).

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, τον οριζόντιο άξονα και την ευθεία x=3.

ΘΕΜΑ Ι

Έστω f συνεχής συνάρτηση με f(1)=1. Αν για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι:

$g(x)=\int_1^{x^3}|z|\cdot f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0,\ \text{όπου}\ z=a+\beta i,\ a,\beta\in\mathbb{R}^*$, τότε:

1. Να δείξετε ότι g παραγωγίσιμη στο R και να υπολογίσετε την g ΄(x).
2. Να δείξετε ότι: $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$.
3. Να δείξετε ότι: $\mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$.
4. Αν f(2)=α>0, f(3)=β, α>β, να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(2,3),\ \text{ώστε}\ f(x_o)=0.$

ΘΕΜΑ Κ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$2f'(x)=e^{x-f(x)},\ x\in\mathbb{R},\ f(0)=0.$

1. Να δείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$
2. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$
3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2012}\cdot f(t)dt\ \ \text{και}\ \ g(x)=\frac{x^{2014}}{2014}$.

   Δείξτε ότι $h(x)=g(x),\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$
4. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x}t^{2012}\cdot f(t)dt=\frac{1}{2015}$, έχει ακριβώς μια λύση στο (0,1).

ΘΕΜΑ Λ

Έστω συνάρτηση f(x)=|xz+1|, όπου z =α+βi , μη μηδενικός μιγαδικός.

1. Αν η f είναι άρτια, να δειχθεί ότι $z\in I$.
2. Αν η πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $(+\infty)$ περνά από το (0,1), να δείξετε ότι ο z είναι πραγματικός.
3. Αν είναι $f(x)\leq e^{|z|x},\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.
4. Αν η συνάρτηση $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ είναι αρχική της $\frac{1}{f(x)}$, να βρεθεί ο μιγαδικός z .

ΘΕΜΑ Μ

Έστω οι παραγωγίσιμες στο [1,α] με α > 1 συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν f(1)=g(1)=1 και

$f(x)+g(x)=\int_1^a f(t)g(t)dt,\ x\in[1,a]$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η εξίσωση $f'(x)-g'(x)=\frac{f(x)-g(x)}{a-x}$ έχει λύση στο (1,α).
2. Η εξίσωση $\left[f(x)-1\right]^2=\frac{a-3}{a-1}$ έχει λύση στο (1,α)
3. Ισχύει $\int_1^a(f(x)+g(x))dx\geq 4.$

ΘΕΜΑ Ν

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με f(1)=1 και f(2)=2, για την οποία ισχύει:

$\int_1^2 f(xt)dt \geq \int_1^2 f(t)dt,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο χ_o στο (1,2) ώστε $f(\chi_o)=3/2$.
2. Υπάρχουν κ, λ στο (1,2) με κ<λ τέτοια ώστε: $f'(\kappa)+f'(\lambda)=2.$

Αν επιπλέον $f'(x)\neq 0,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(1,2)$, και f ΄ συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη C_f, τον χχ΄ και τις ευθείες x=1 και x=2

ΘΕΜΑ Ξ

Έστω συνάρτηση $f:[2013,2014]\to\mathbb{R},\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \ \mu\varepsilon\ f(x)\neq 0,\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$

$g(x)=\int_{2013}^{x} f(t)dt+\int_{2014}^{x} f(t)dt,\quad x\in[2013,2014].$

Αν γνωρίζουμε ακόμα ότι το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f, τον χχ΄ και τις ευθείες χ=2014 και χ=2013 ισούται με 1 καθώς και ότι: $\int_{2013x}^{2014x}\frac{t}{x^2}\cdot f\left(\frac{t}{x}\right)dt=1007$, τότε:

1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[2013,2014]\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(\xi)=\frac{1007}{\xi}.$
2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g.
3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης g.
4. Να υπολογίσετε το: $\int_{2013}^{2014} g(x)dx.$

ΘΕΜΑ Ο

Έστω $z=z(x)=(x-2)\cdot\left[\sqrt{e^{2x}-2}+\sqrt{2}\cdot i\right],\ 1\leq x\leq 2$ και η συνάρτηση $f(x)=|z(x)|.$

1. Να βρείτε τον z(x) με το μεγαλύτερο μέτρο.
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.
3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία y=x σε ένα τουλάχιστον σημείο $x_0\in(1,2).$
4. Να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x)dx.$

ΘΕΜΑ Π

Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο R για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \int_0^x f(t)dt+\int_1^{1-x} g(t)dt\geq x^2-x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Να δείξετε ότι:

1. Η εξίσωση f(x)=g(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).
2. f(0)+f(1)=g(0)+g(1).
3. Υπάρχει $\xi_1\in(0,1)\ \ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ f(\xi_1)=g(1-\xi_1).$
4. Υπάρχει $\xi_2\in(0,1)\ \ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ f'(\xi_2)+g'(1-\xi_2)=2.$

ΘΕΜΑ Ρ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=x\ln(x+1)-(x+1)\ln x,\ \ x>0.$

1. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x},\ \ x>0.$
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
3. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right).$
4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α>0 ώστε: $(a+1)^a=a^{a+1}$

ΘΕΜΑ Σ

Μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη :

$f(x)=\int_0^2 f(x)\,dx-f'(x)\ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(0)=2.$

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.
2. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της f στο συν άπειρο.
3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, την παραπάνω ασύμπτωτη και τις ευθείες x=0 και x=2.

ΘΕΜΑ Τ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\dfrac{(\mu-2)(x^2-1)+\ln(1-x)}{x}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , την τιμή του πραγματικού αριθμού μ για την οποία το $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το λ.
2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}e^{\frac{1}{x+1}}\cdot f(t)dt\right)$

ΘΕΜΑ Υ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^1 t\cdot e^{(x-t^2)^3}dt$

1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση για κάθε χ πραγματικό.
2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
3. Να δείξετε ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y=0 στο μείον άπειρο.
4. Αν g(x)=f(x)+x, να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η C_g τέμνει την $C_{g^{-1}}$

ΘΕΜΑ Φ

Έστω η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει:

$$\eta\mu f(x)=4f(x)+3x^2,\ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι f(0)=0.

2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$
3. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
4. Να αποδείξετε ότι η f δεν παίρνει θετικές τιμές.

ΘΕΜΑ Χ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί α, β, γ με |α|=|β|=|γ|=1 και
$|3\alpha+\beta+\gamma|^2+|\alpha+3\beta+\gamma|^2+|\alpha+\beta+3\gamma|^2=12$. Να αποδείξετε ότι:

1. α+β+γ=0
2. $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|=\sqrt{3}$
3. Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των α, β, γ είναι ισόπλευρο με εμβαδόν ίσο με $E=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

ΘΕΜΑ Ψ

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=2+(x-2)^2 \quad \mu\varepsilon \quad x\geq 2.$

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.
2. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f .
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x.
4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

ΘΕΜΑ Ω

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=x^2-1+\frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt, \quad x>0$$

1. Να υπολογίσετε το f(1)
2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=3x-1$
3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον xx΄ και τις ευθείες x=2 και x=4.

ΘΕΜΑ ΑΑ

Έστω η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1},\ x\in\Re.$

1. Να δείξετε ότι η f παίρνει μόνο θετικές τιμές.
2. Βρείτε το $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$
3. Να προσδιορίσετε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}.$
4. Να δείξετε ότι: $\sqrt{(a+\sqrt{a^2+1})(\beta+\sqrt{\beta^2+1})}\leq\dfrac{a+\beta}{2}+\sqrt{(\dfrac{a+\beta}{2})^2+1},\ \ a,\beta>0.$

ΘΕΜΑ ΑΒ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x x^2(x-\alpha)$, όπου α>0.

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ με 0<ξ<α για τον οποίο ισχύει f '(ξ)=0.

Β. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f στο [0,α] είναι το 0.

Γ. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ και ο άξονας χχ' περικλείουν χωρίο εμβαδού ίσου με (4/3)τ.μ. να βρείτε την τιμή του α και να υπολογίσετε την τιμή του ορίου : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\int_3^x f(t)\,dt}{xe^x-3e^x}$.

ΘΕΜΑ ΑΓ

Έστω η παραγωγίσιμη για κάθε χ>0 , με τιμές στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$f'(x)\cdot e^{x+f(x)}=2x-x^2,\ x>0.$ Αν διέρχεται από το Α(1,-1), να βρείτε:

1. Τον τύπο της συνάρτησης f.
2. Το σύνολο τιμών της f.
3. Τις ασύμπτωτες της f.
4. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον χχ΄ και τις ευθείες χ=1 και χ=4.
5. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=k, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού k και
6. Να λυθεί η εξίσωση: $2\cdot\ln\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+8}\right)=x^2-9,\ \ \gamma\iota\alpha\ x>2.$

ΘΕΜΑ ΑΔ

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει ότι: f(x+1)-f(x)=2x-1
και $\int_0^1 f(t)dt=2.$ Έστω ακόμα η συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt-x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}.$

1. Να δείξετε ότι η g(x) είναι σταθερή με g(x)=1.
2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο ξ, να σχηματίζει γωνία 135° με τον χχ΄ .
3. Να δείξετε ότι: $\int_0^3 f(t)dt=8.$
4. Να δείξετε ότι υπάρχει μία ακριβώς θετική τιμή του χ για την οποία να ισχύει ότι:
   $\int_x^{x+1} f(t)dt=2014$

ΘΕΜΑ ΑΕ

Έστω οι συναρτήσεις f, F, G με τύπους:

$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} f(t)dt\ \ \kappa\alpha\iota\ \ G(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x}\dfrac{f(t)}{t^2}dt,\ x>0.$ Να δείξετε ότι:

1. Ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)=f(\frac{1}{x})\ \ \kappa\alpha\iota\ \ -\frac{1}{8}\le f'(x)\le 1.$
2. Αν 0<α<β, ισχύει η σχέση: $f\left(\dfrac{1}{\beta}\right)-f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\le\beta-\alpha.$
3. Αν g(x)=F(x)+G(x) για κάθε x>0, να δείξετε ότι: g(x)=lnx+1.
4. Αν η συνάρτηση h(x)=F(εφx)+G(σφx) είναι συνεχής στα σημεία 0 και π/2 καθώς και στο (0,π/2), τότε είναι σταθερή στο Δ=[0,π/2]. Να βρείτε και τον τύπο της συνάρτησης h.

ΘΕΜΑ ΑΖ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [2,4], για την οποία ισχύει ότι f(2)=1/2, f(4)=1 και $f(x)\in[-2,2],\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[2,4]$. Έστω ακόμα η συνάρτηση g(x) με τύπο: $g(x)=e^{f(x)}+x\cdot f(x),\ x\in[2,4]$.

Να δείξετε ότι:

1. Υπάρχει x_o στο (2,4) τέτοιο ώστε $g'(x_o)=0$.
2. Η εξίσωση $f'(x)(e^{f(x)}+x)+f(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Υπάρχει πραγματικός αριθμός ξ ώστε: $g''(\xi)=f'(\xi)\cdot\left[e^{f(\xi)}\cdot f'(\xi)+2\right]$.

ΘΕΜΑ ΑΗ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R, με f(0)=0, $f(x)\geq 0$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f'(x)\cdot\int_0^x f(t)dt+f^2(x)=12x.$$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση f .
2. Αν g(x)=f(x)+lnx, x>0, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα χχ΄ σ' ένα ακριβώς σημείο.
3. Αν ισχύει ότι 0<α<β ,να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt{a}-\sqrt{\beta}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ln\sqrt[3]{\frac{\beta}{a}}$.

ΘΕΜΑ ΑΘ

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία f(0)=0 καθώς και η συνάρτηση g με

$$g(x)=\int_0^2\left(f\left(\frac{xt}{2}\right)-3f\left(\frac{2-xt}{2}\right)\right)\cdot xdt,\quad \mu\varepsilon\ \ g(1)=g'(1)\neq 0.$$ Να αποδείξετε ότι:

1. $g(1)=-4\int_0^1 f(u)du$
2. Υπάρχει $\xi\in(0,1)\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ f(\xi)=-\frac{1}{4}g(1)$.
3. Υπάρχει $x_o\in(0,1)\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ f(x_o)=0$

ΘΕΜΑ ΑΙ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με $f(x)=x-\ln(1+x),\qquad g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1},\quad x>-1.$

1. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.
2. Να δείξετε ότι: $\frac{x}{x+1}\leq\ln(x+1)\leq x,\ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x>-1.$
3. Να δείξετε ότι: $\ln\frac{e+1}{2}\leq\int_0^1\ln(e^x+1)dx\leq e-1.$
4. Να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha\left(f(x)+g(x)\right)dx\leq\frac{\alpha^2}{2},\ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ \alpha>-1.$

ΘΕΜΑ ΑΚ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\ln(x^2+6)-\ln(x^2+1),\quad x\in[-2,2].$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα στο [-2, 2].
2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (-2,2)$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$: $|f'(\alpha)| > \frac{1}{4}\cdot \ln\frac{4}{3}$.
3. Να δείξετε ότι: $1 \le \frac{1}{8}\cdot\int_{-2}^{2} e^{f(x)}dx \le 3.$

ΘΕΜΑ ΑΛ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = (x-1)^2 + \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0,1)$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$: $g'(\alpha) = 0$.
2. Να δείξετε ότι $g(\alpha) = \frac{1}{4}f^2(2\alpha) + f^2(\alpha)$.
3. Να δείξετε ότι $g''(x) \ge 4$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in \mathbb{R}$.
4. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k ώστε να ισχύει: $g'(k^2) + 4k = g'(k) + 4k^2$

ΘΕΜΑ ΑΜ

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας θετικός πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε $\ln\alpha + \alpha - 3 = 0$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\cdot(\ln x - 2)$, $x > 0$.

1. Να δείξετε ότι: $f(x) + \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 \ge 0$, $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x > 0$.
2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o > \alpha$ τέτοιο ώστε : $f(x_o) + f'(x_o) = 0$.

ΘΕΜΑ ΑΝ

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ $\mu\varepsilon$ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. $A\nu$ $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ να δείξετε ότι:

1. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$
2. $(z_1 + z_2)\cdot(z_2 + z_3)\cdot(z_1 + z_3) = 0$
3. $\frac{1}{z_1^{2013}} + \frac{1}{z_2^{2013}} + \frac{1}{z_3^{2013}} = 1$

ΘΕΜΑ ΑΞ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε:
   $2013\left(e^{2\alpha} - 1\right) = 2012\left(e^{2\alpha} + 1\right)$
3. Να δείξετε ότι : $f'(x) = 1 - [f(x)]^2$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in \mathbb{R}$.
4. Να βρείτε τις τιμές των Α , Β όταν: $A = \int_0^1 f^2(x)dx$, $B = \int_0^2 x\cdot\left[1 - f^2(x)\right]dx$.

ΘΕΜΑ ΑΟ

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0,1] για την οποία ισχύει f(0)>0. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0,1] για την οποία ισχύει g(x)>0 για κάθε $x \in [0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt,\ x \in [0,1]\ \ και\ \ G(x) = \int_0^x g(t)dt,\ \ x \in [0,1]$.

1. Να αποδείξετε ότι F(x)>0 για κάθε χ στο διάστημα (0,1].
2. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \cdot G(x) > F(x),\ \ για\ \ κάθε\ \ x \in (0,1]$.
3. Να αποδείξετε ότι ισχύει : $\dfrac{F(x)}{G(x)} \le \dfrac{F(1)}{G(1)},\ \ για\ \ κάθε\ \ x \in (0,1]$.
4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} ημt^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}$

ΘΕΜΑ ΑΠ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\int_0^x f(t)dt > \int_x^1 f(t)dt\ \ για\ \ κάθε\ \ x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\int_0^1 f(t)dt = 0$
2. f(1)=f(0)=0
3. η εξίσωση $f(x) \cdot \int_x^1 f(t)dt = f(x) \cdot f'(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1).

ΘΕΜΑ ΑΡ

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $x \ge 0$ ισχύει η σχέση: $\ln(1+x) \le x$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln(e^x + kx) - x,\ \ x \in [0,+\infty),\ k > 0$.

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι: $f(x) \le \dfrac{k}{e}\ \ για\ \ κάθε\ \ x \ge 0$.
2. Αν Ε(α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον χχ΄ και τις ευθείες χ=0, χ=α, (όπου α>0), να δείξετε ότι: $E(\alpha) \le k \cdot \int_0^\alpha x \cdot e^{-x} dx$
3. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha) \le k$.

ΘΕΜΑ ΑΣ

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο: $g(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1,\ x \in [0,1],\ \ όπου\ \ \alpha, \beta > 0\ \ με\ \ 2\alpha + 3\beta = 6$ καθώς και τη συνεχή και γνησίως φθίνουσα στο [0,1] συνάρτηση f. Να αποδείξετε ότι:

1. Υπάρχει μοναδικό $p \in (0,1)\ \ ώστε\ \ g(p) = 0$.
2. $\int_0^1 f(x)g(x)dx \le 0$.
3. $\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 \left(\alpha x^2 + \beta x\right) \cdot f(x)dx$

ΘΕΜΑ ΑΤ

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = f(\alpha) + i \cdot g(\alpha),\ z_2 = f(\beta) + i \cdot g(\beta),\ z_3 = f(\gamma) + i \cdot g(\gamma)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο [α,β] και α<γ<β.

1. Αν $z_1 = -z_2$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in [\alpha, \beta]$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $f(x_1) + g(x_1) = 0$.
2. Αν $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_3 \cdot \overline{z_3}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_2) \cdot f(x_2) + g'(x_2) \cdot g(x_2) = 0$
3. Αν $|z_3 - z_1| = \gamma - \alpha$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοια ώστε: $[f'(\xi_1)]^2 + [g'(\xi_2)]^2 = 1$
4. Αν ισχύει το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\sigma\tau o$ $[\gamma, \beta]$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού $w = z_2 \cdot \overline{z_3}$.

ΘΕΜΑ ΑΥ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0,1] καθώς και η εξίσωση: $z^3 + f(1) \cdot z^2 - z + f(0) = 0$. Αν η εξίσωση έχει ρίζα το μιγαδικό $(1+i)$, να αποδείξετε ότι:

1. Υπάρχει ρίζα της f στο (0, 1).
2. Υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $2f'(x) + 7 = 0$ στο (0,1).
3. Υπάρχουν τιμές $\xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$: $f'(\xi_3) \cdot f'(\xi_2) = -\dfrac{3}{2\xi_1^2 - 2\xi_1}$, όπου ξ_1 η ρίζα του ερωτήματος (1).

ΘΕΜΑ ΑΦ

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [α,β] για την οποία ισχύει $f'(x) \cdot \mathrm{Im}(z_1) > 0$ για κάθε χ πραγματικό, όπου z_1 ρίζα της εξίσωσης $\left(\dfrac{z-3i}{z-i}\right)^{2008} = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. Ο z_1 είναι φανταστικός.
2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β].
3. Ισχύει $f\left(\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}\right) > f\left(\dfrac{3\alpha+2\beta}{5}\right)$

ΘΕΜΑ ΑΧ

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο [0,2] με f(1)=1. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(0) + f(2) > 2$
2. Αν $z(x) = f(x) - x \cdot \ln x \cdot i$ $\mu\varepsilon$ $|z(x)| \geq 1$, τότε η f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, την οποία και να υπολογίσετε.
3. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο [0,2].
4. Ισχύει η σχέση: $0 < \int_0^2 f(x)dx \leq f(0) + f(2)$

ΘΕΜΑ ΑΨ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \dfrac{|z+1|^x}{|z|^x + |z+1|^x}$, $z \in \mathbb{C}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^{2013}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, αν γνωρίζετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο (0, f(0)) είναι παράλληλη της ευθείας με εξίσωση: $y = \frac{\ln 2}{4} \cdot x - \ln 2013$.

ΘΕΜΑ ΑΩ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει η σχέση: $f(x) = -\frac{1}{x} - \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{f(xt)}{t}\, dt$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
2. Είναι $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x},\ x > 0$.
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ε(λ) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της καμπύλης f, την οριζόντια ασύμπτωτη και τις ευθείες χ=1 και χ=λ με 0<λ<1.
5. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lambda^2 \cdot E(\lambda)\right]$.

ΘΕΜΑ ΒΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2}\right),\quad x > 0$.

1. Να δείξετε ότι για κάθε α,β με $1 \le \alpha < \beta$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$: $f'(\alpha) + f''(\beta) < f'(\beta) + f''(\alpha)$
2. Να βρείτε το: $I_\alpha(x) = \int_x^{e^\alpha} t(\alpha - \ln t)dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Να βρείτε το α ώστε: $\lim\limits_{x\to 0^+} I_\alpha(x) = 1$

ΘΕΜΑ ΒΒ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη, παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο στο R, για την οποία επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(1) = e,\ f'(1) = 0,\ f(x) > 0 \quad \kappa\alpha\iota$$
$$2013 \cdot \ln f(x) - \ln|x| \ge 2013 + |z| \cdot f(x) \cdot (1 - x),\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ \ x \in \mathbb{R}^*,\ z \in \mathbb{C}.$$

1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος.
2. Να δείξετε ότι $f(x) \ne 1\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ x \in [1,e]$.
3. Αν f(e)=4e, τότε :

   α) Να υπολογίσετε το : $\int_1^{|z|} \frac{2 \cdot f'(x)}{f^2(x) - 1} dx$

   β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (1,e)$: $f'(x_o) = x_o$.

ΘΕΜΑ ΒΓ

1. Έστω f(x) συνάρτηση με τύπο $f(x) = \int_0^x e^{2xt} dt,\ x \ge 0$.

   Α. Να δείξετε ότι f συνεχής στο $[0,+\infty)$.

   Β. Να δείξετε ότι f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

   Γ. Να δείξετε ότι f γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

2. Έστω ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i,\quad \alpha<\frac{1}{2},\quad \beta\neq 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \kappa=2|z|^2-4\cdot \mathrm{Re}\,z$

Α Να δείξετε ότι: $|z-1|>|z|$

Β. Να δείξετε ότι: $\int_0^{k+2} 2|z|\cdot e^x dx>\int_0^{k+4\mathrm{Re}(z)} 2\cdot|z-1|\cdot e^x dx$

ΘΕΜΑ ΒΔ

Α. Αν η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη χωρίς πιθανά σημεία καμπής , να δείξετε ότι η συνάρτηση g΄ είναι 1-1.

Β. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α,β]. Να δείξετε ότι υπάρχουν

$x_1,x_2\ \ \sigma\tau o\ \ (\alpha,\beta)\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon: f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{2\cdot\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}$

Γ. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $f'(x)+f(x)=-3+2\cdot e^{-x}$. Αν η κλίση της f στο 0 ισούται με την κλίση της συνάρτησης g στο σημείο 1, όπου $g(x)=\int_1^x|t^2-2t|dt,\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:$

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$