

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

(όρια (και DLH), συνέχεια, Bolzano, παράγωγοι, μονοτονία, Θ. Rolle, Θ.Μ.Τ.)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

A3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία της συνάρτησης στο x_0 .

β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή από το Δ , τότε η γραφική της έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την $y=x$.

γ. Αν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος μέσης τιμής ισχύουν για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[a,b]$, τότε θα ισχύουν και για την συνάρτηση $g(x)=f^2(x)$.

δ. Αν το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 υπάρχει, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 .

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για τη οποία γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη της στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση: $y = 2x - 3$.

B1. Να βρείτε τα $f(0)$ και $f'(0)$ καθώς και το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(500x) + f(507x) + 6}{x}$

B2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) + 3x^2}{\eta\mu^3 2x} \quad ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 2}{f^2(x) + 6f(x) + 9}$$

B3. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $f(-3)=-9$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(-3,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνήσια μονότονη, για την οποία ισχύει η σχέση: $\ln x + 1 < f(x) < e^{x-1} - x + 1$, για κάθε $x > 1$.

Γ1. Να υπολογίσετε το $f(1)$ και να δικαιολογήσετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{1}{f(x)+1} + \frac{1}{x} = 1$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $(1,2)$.

Γ3. Να βρείτε τα α, β αν ισχύει η σχέση: $f(\alpha) + f(\beta) = 2$

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^{x-1}) + f(4^{x-1}) = f(e^{x-1}) + f(5^{x-1})$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + a - e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \ln(x+1) - x + 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $a=1$ και να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f .

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f - αν υπάρχουν.

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Δ4. Να λύσετε στο $[0, 2\pi]$ την εξίσωση: $f(\eta\mu 2x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 2$

| A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | Γ1 | Γ2 | Γ3 | Γ4 | Δ1 | Δ2 | Δ3 | Δ4 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 7 | 8 | 7 | 12 | 6 | 5 | 8 | 5 | 7 | 5 | 8 | 7 | 5 |