

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ

1. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 3x - 2 = 0$  και έστω  $\alpha$  και  $\beta$  οι ρίζες της.

α. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:  $K = \alpha^2 + \beta^2$ ,  $L = \alpha^3 + \beta^3$ ,  $M = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$

β. Να βρείτε το τριώνυμο με ρίζες τους αριθμούς  $\alpha^2\beta$  και  $\alpha\beta^2$ .

γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $x^2 - \sqrt{L} \cdot x + M = 0$

2. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (k-1)x - 16 = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του  $k$ .

β. Αν γνωρίζετε ότι ο λόγος των ριζών του είναι ίσος με  $-4$ , να βρείτε τις ρίζες και τον αριθμό  $k$ .

3. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2kx + 27 = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

α. Αν υποθέσετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες με τη μία να είναι τριπλάσια της άλλης, να βρείτε την τιμή του  $k$  καθώς και τις ρίζες.

β. Είναι δεκτές οι τιμές που βρήκατε; Ελέγξτε τη διακρίνουσα.

4. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + (k-2)x - 8 = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού  $k$ .

β. Αν η μία ρίζα ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και τον  $k$ .

5. Αν ο αριθμός  $\alpha$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $x^2 - 3\alpha x - \beta = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι ο αριθμός  $\beta$  είναι ρίζα της εξίσωσης:  $3x^2 + 8\alpha^2 x + 4\alpha^4 = 0$ . Μπορείτε να βρείτε το πρόσημο των ριζών καθώς και την άλλη ρίζα του 1<sup>ου</sup> τριωνύμου;

6. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - (k-1)x + k - 2 = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $k$  η εξίσωση έχει:

i. Δύο θετικές ρίζες    ii. Δύο αρνητικές ρίζες    iii. Δύο ετερόσημες ρίζες

iv. Δύο αντίθετες ρίζες    v. Δύο αντίστροφες ρίζες.

7. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 2 = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

α. Βρείτε για ποιες τιμές του  $k$  η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Να βρείτε το  $k$  ώστε να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

γ. Να βρείτε το  $k$  ώστε να έχει δύο αντίθετες ρίζες.

8. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a = 0$ ,  $a \in (-1, 0)$ .

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου ως συνάρτηση του  $a$ .

β) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του τριωνύμου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:  $x^2 - 2(a+1)x + 1 = 0$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:**

1. α)  $K=13, L=45, M=45/4$  β)  $x^2 + 6x - 8 = 0$  γ) Διπλή ρίζα  $x = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

2. α)  $\Delta = (k-1)^2 + 64 > 0$

β)  $p_1 = 2, p_2 = -8, k = -5$  ή  $p_1 = -8, p_2 = 2, k = 7$

3. α)  $p_1 = \pm 3, p_2 = \pm 9, k = 6$  ή  $k = -6$

β) Δεκτή μόνο η  $k = 6$ , δηλαδή  $p_1 = 3, p_2 = 9$ .

4. α)  $\Delta = (k-2)^2 + 32 > 0$  β)  $p_1 = 4, p_2 = -2, k = 4$

5)  $\beta = -\alpha^2, \beta < 0, \alpha \in \mathbb{R}$  και τελικά και  $p_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

6) α)  $\Delta = (k-3)^2 \geq 0$

β) *i.  $k > 2$  ii. Αδύνατο iii.  $k < 2$  iv.  $k = 1$  v.  $k = 3, p_1 = p_2 = 1$*

7) α)  $k < \frac{9}{4}$  β)  $k = \pm\sqrt{3}$  γ)  $k = \frac{1}{2}$

8) α)  $\Delta = 1, p_1 = a, p_2 = a+1$  β)  $a < 0, a+1 > 0$  γ)  $\Delta = 4a(a+2) < 0$