ΘΕΜΑΤΑΚΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνονται τα σημεία $A(2,2\sqrt{3})$, $B(4,0)$ και $\Gamma(\kappa+4,-\kappa\sqrt{3})$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του κ.

Β. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$.

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot\overrightarrow{B\Gamma}^2$

Δ. Για κάθε μία από τις τιμές του κ του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων Α, Β, Γ.

(***Απαντήσεις***: *Β: 60° Γ: κ=-1 ή κ=2 Δ: Για κ=-1, το Γ ανάμεσα στα Α και Β ενώ για κ=2 το Β είναι ανάμεσα στα Α και Γ*)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η εξίσωση: $(*)\ \left(\lambda^2+\lambda+1\right)x+\left(\lambda^2-5\right)y-2\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε λ πραγματικό.

Β. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σταθερό σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της οικογένειας.

Γ. Να βρείτε – αν υπάρχει – ευθεία της οικογένειας παράλληλη στην (ε) :

31χ+31ψ-19=0

Δ. Για λ=-6, βρείτε την απόσταση των ευθειών (ε) και (*).

Ε. Για λ=1, βρείτε το πλησιέστερο σημείο της (*) στο σημείο Ο(0,0).

(***Απαντήσεις***: *Γ: Για λ=-6, η ευθεία 31χ+31ψ+12=0 Δ:* $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *Ε:* $\left(\frac{6}{25},-\frac{8}{25}\right)$)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η εξίσωση: $(*)\ x^2+y^2+\left(2\lambda+6\right)x+\left(2\lambda-6\right)y+2\lambda^2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι παριστάνει ίσους κύκλους για κάθε λ πραγματικό, των οποίων να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Β. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων , είναι η ευθεία με εξίσωση: y=x+6 (ε).

Γ. Όλοι οι κύκλοι της οικογένειας (*) έχουν δύο κοινές εφαπτόμενες. Να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Δ. 1. Να βρείτε την εξίσωση μιας παραβολής με εστία στον ψψ΄ , η οποία να έχει εφαπτομένη την ευθεία (ε).

2. Να βρείτε μια εφαπτομένη της προηγούμενης παραβολής, κάθετη στην (ε).

(***Απαντήσεις***: *Α: Κ(-λ-3,3-λ) με ακτίνα* $R=3\sqrt{2}$ *Γ: y=x+12, y=x*

Δ: $x^2=-24y,\ y=-x+6$)

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται το σημείο Α(1,2) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\left(-2,1\right)$, όπου Μ μέσο ενός τμήματος ΑΒ.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το (-1,3) ενώ το Β είναι το (-3,4)

Β. Αν $\vec{a}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{BM}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0},\ \vec{\beta}=\left(\lambda^2,\lambda-3\right)$ να βρείτε τη τιμή του λ ώστε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, να είναι συγγραμμικά.

Γ. Αν $\vec{\gamma}=\left(2\kappa-4,\kappa^2-1\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$, βρείτε το κ ώστε $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$.

(***Απαντήσεις***: *Β: λ=3 Γ: κ=2*)

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται η εξίσωση: (*) $x^2-y^2+4x+6y-5=0$

Α. Να αποδείξετε ότι η (*) παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

Β. Πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1):y=-x+1$ $(\varepsilon_2):y=x+5$, παίρνουμε τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε το σημείο Μ(-1,0) να είναι το μέσο του ΑΒ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

Γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Ν(x,y), για τα οποία ισχύει ότι η γωνία ΑΝΒ είναι ορθή.

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Λ(x,y) , για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΒ ισούται με $3\sqrt{10}$ τ.μ.α

(***Απαντήσεις***: Α: y=-x+1, y=x+5 Β: Α(2,-1), Β(-4,1) Γ: $(x+1)^2+y^2=10$

Δ: $y=-\frac{1}{3}x+\sqrt{10}-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x-\sqrt{10}-\frac{1}{3}$)

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις: $C_1: x^2+y^2+10x+9=0$ $C_2: x^2+y^2-10x-11=0$

Α. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι είναι εξωτερικά εφαπτόμενοι.

Β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στους δύο κύκλους που άγονται από το σημείο Α(-1,8).

Γ. Η μία από τις τρεις εφαπτόμενες του ερωτήματος β είναι διευθετούσα μιας παραβολής με εστία στον χχ΄ και άξονα συμμετρίας τον χχ΄. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στους κύκλους C_1 και C_2.

(***Απαντήσεις:*** *Α: Δείχνω ότι ΚΛ=R+r Β:* $\chi=-1$

Γ: $y^2=4x$ *Δ: Ο ένας κλάδος της υπερβολής* $x^2-\frac{y^2}{24}=1$, για $x\geq 1$)

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(x-1,y+2\right)$, $\vec{\beta}=\left(x+1,y-2\right)$.

Α. Αν ισχύει ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x,y).

Β. Για χ=3 και y=-1, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου του ερωτήματος (Α) , στο σημείο του Α(1,-2).

Δ. Βρείτε την παραβολή με εφαπτομένη την ευθεία του ερωτήματος (Γ) και εστία στον άξονα ψψ΄.

(***Απαντήσεις***: *Α.* $x^2+y^2=5$ *Β. Η προβολή είναι το διάνυσμα (6, 3)* *Γ.* $x-2y=5$

Δ. $x^2=40y$)

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-2,-\frac{|\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$. Α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

Β. Για την πιο μεγάλη από τις τιμές του μέτρου που βρήκατε, να υπολογίσετε τη γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$ με τον άξονα χχ΄ .

Γ. Αν ισχύει ότι: $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} = \left(x^2, x\sqrt{3}\right)$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, βρείτε το χ.

(***Απαντήσεις:*** *Α.* $\vec{a} = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$ ή $\vec{a} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ *Β. ω=300° Γ. χ=3)*

ΘΕΜΑ 9°

Δίνεται η εξίσωση: $(*): \left(a^2 - 4\right)x + \left(a^2 + a\right)y + a^2 + 2a + 4 = 0,\ a \in \mathbb{R}.$

Α. Να δείξετε ότι είναι ευθεία για κάθε α πραγματικό αριθμό.

Β. Να δείξετε ότι περνά από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

Γ. Για α=1 , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες.

(***Απαντήσεις:*** *Β. (1,-2) Γ. Εμβαδόν=(49/12) τετ. μον. άξονα)*

ΘΕΜΑ 10°

Δίνεται η γραμμή με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + a = 0,\ a \in \mathbb{R}$

Α. Να περιορίσετε κατάλληλα την τιμή του α, ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

Β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η ευθεία με εξίσωση: y=-x+1 να εφάπτεται του κύκλου.

Γ. Για α=7, να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του Μ(2,-1)

(***Απαντήσεις:*** *Α. Πρέπει α<9 Β. α=7 Γ. x+y=1)*

ΘΕΜΑ 11°

Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις: $C_1 : x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 + 6y - 72 = 0$

Α. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες τους.

Β. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

Γ. Αν τα σημεία Μ και Ν διατρέχουν τους δύο κύκλους, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μήκους ΜΝ καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Ν για τα οποία η απόσταση ΜΝ γίνεται ελάχιστη και μέγιστη αντίστοιχα.

Δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Α(x,y) που είναι κέντρα των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εσωτερικά του C_2 και εξωτερικά του κύκλου C_1 .

(***Απαντήσεις:*** *Α. Κ(0,3) r=1 και Λ(0,-3), R=9 Β. Ο πρώτος είναι εσωτερικός του δεύτερου, αφού ΚΛ < R-r Γ. Μ(0,4), Ν(0,6), minΜΝ=2, Μ(0,4), Ν(0,-12) , maxΜΝ=16 Δ. Επειδή ΑΚ+ΑΛ=10, ο γ.τ είναι έλλειψη με εξίσωση:* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$)

ΘΕΜΑ 12°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0$

Α. Να δείξετε ότι παριστάνει δύο κάθετες ευθείες.

Β. Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Γ και η κάθε μία τους τέμνει την y=2x+3 στα Α και Β , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ που σχηματίζεται.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

(***Απαντήσεις:*** Α. y=x+2, y=-x-2 Β. Τα σημεία είναι: Γ(-2,0) , Α(-1,1) και $B\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ Γ.

$\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{125}{9}$)