ΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ ΜΠΟΡΕΙΤΕ (ΤΡΙΤΟ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο α, τότε είναι και συνεχής στο σημείο α. Ισχύει το αντίστροφο; Δικαιολογήστε.

(9 μονάδες)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

(3 μονάδες)

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση ορισμένη στο Α ,είναι κυρτή στο Α;

(3 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

1. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία α και β με α < β, τότε υπάρχει σημείο $χ_ο$ στο (α,β) ώστε $f''(χ_ο)=0$.
2. Αν για τις συναρτήσεις f,g ισχύει f(x) > g(x) για κάθε x πραγματικό, τότε ισχύει γιαυτές ότι: $f'(x) > g'(x)$.
3. Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει Re(z)=-Im(z) είναι η ευθεία y=-x.
4. Αν για την συνεχή και μη σταθερή στο [α,β] συνάρτηση f ισχύει ότι $\int_a^\beta f(x)dx = 0,$ τότε η f(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].
5. Αν δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον χχ΄, τότε είναι εικόνες συζυγών μιγαδικών αριθμών.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$|z-2i|^2+|z+2i|^2=16 \quad \kappa\alpha\iota \quad |w-\sqrt{7}|+|w+\sqrt{7}|=8$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 2.

(6 μονάδες)

Β2. Αν z_1 και z_2 είναι δύο μιγαδικοί του παραπάνω γεωμετρικού τόπου για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|z_1-z_2|=3$, να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

(7 μονάδες)

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών w είναι η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του |w|.

(6 μονάδες)

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν τις αρχικές σχέσεις, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $1 \le |z-w| \le 6$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot e^{x-1},\ \ x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f και το σύνολο τιμών της.

(6 μονάδες)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot e^{2012} = -e^{-x}$, έχει δύο ακριβώς ρίζες.

(6 μονάδες)

Γ3. Αν είναι $x_1 < x_2$, οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (x_1, x_2)$ ώστε $e^{-2013} \cdot \left(f'(x_o) + f(x_o)\right) = -1$

(6 μονάδες)

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τους δύο άξονες και την ευθεία χ=1.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}^*$, η οποία για κάθε χ>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq 0, \quad 2 \cdot \int_2^{x^2-x+2} f(t)\,dt \geq \left(x^2 - 2x\right)\ln 2$$

$$\text{και}\ \ x^2 + 4 \cdot \int_2^x f(t)\,dt = 2x \cdot |f(x)| - 2x \cdot \ln x + 4x \quad \text{για κάθε}\ \ x > 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

(10 μονάδες)

Δ2. Αν είναι $f(x) = (x-1) \cdot \ln x,\ \ x > 0$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$$

(5 μονάδες)

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ a > 0$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κυρτή για χ>1 και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x) \ \ \text{για κάθε}\ x > 1.$$

(6 μονάδες)

Δ4. Δίνεται ο σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός k. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός ξ στο (k, 2k) τέτοιος ώστε: $F(k) + F(3k) > 2F(\xi)$ για κ>1.

(4 μονάδες)