ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνεχής και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ συνάρτηση f, είναι τέτοια ώστε $f'(x)=0$ για κάθε x από το διάστημα Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

(9 μονάδες)

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Rolle.

(3 μονάδες)

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f;

(3 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

1. Κάθε συνεχής σε ένα διάστημα Δ συνάρτηση, έχει παράγουσα.
2. Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η παράγωγος της συνάρτησης διατηρεί θετικό πρόσημο.
3. Δύο συναρτήσεις , οι οποίες έχουν ίσες παραγώγους και των οποίων συναρτήσεων οι γραφικές περνούν από το (0,0) και οι δύο, ταυτίζονται.
4. Αν για μια συνάρτηση γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, τότε η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα για θετικές τιμές του x.
5. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει η σχέση: $|z^\nu|=|z|^\nu$

   (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Έστω δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές, η οποία έχει ρίζες τους **μη πραγματικούς μιγαδικούς** z και $\frac{4}{z}$ καθώς και ο μιγαδικός w για τον οποίο ισχύει η σχέση: $|w-ai|=|\overline{w}-ai|$, $a\in\mathbb{R}^*$

1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z **(6 μονάδες)** και το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών w. **(3 μονάδες)**

1. Να δικαιολογήσετε ότι : $z\neq w$ όπου z, w μιγαδικοί οι οποίοι ανήκουν στους παραπάνω γεωμετρικούς τόπους. **(5 μονάδες)**

2. Να δείξετε ότι: $0<\left|z-\frac{4}{z}\right|\leq 4$. **(5 μονάδες)**

4. Να αποδείξετε ότι: $0<|z-w|\leq 2\sqrt{2}$, $\alpha\nu\ -2\leq w\leq 2$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $e^x\cdot\sqrt{1+f^2(x)}-1=e^x(f(x)+c)$, $x\in\mathbb{R}$, c σταθερά.

1. Να αποδείξετε ότι c=0. **(6 μονάδες)**
2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$. **(6 μονάδες)**
3. Να βρείτε το σημείο καμπής της συνάρτησης f καθώς και την εφαπτομένη της στο σημείο (ln2, f(ln2)). **(7 μονάδες)**
4. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\geq\dfrac{5}{2}x-\ln\sqrt{32}+\dfrac{3}{2}$ για κάθε $x>0$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^1\dfrac{t^{2x}}{t+1}dt$, $x>0$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h(x)=f(x+1)-f(x), x>0

(6 μονάδες)

Δ2. Αν $h(x)=\dfrac{1}{2x+2}-\dfrac{1}{2x+1}$, $x\in(0,+\infty)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x), f(x+1) και τις x=1, x=λ, λ>1.

(6 μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(4 μονάδες)

Δ4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $h(x)=-\dfrac{1}{3}$

(4 μονάδες)

Δ5. Να βρείτε διάστημα διαδοχικών ακέραιων στο οποίο να ανήκει ένας αριθμός ξ, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο ξ να είναι κάθετη στην ευθεία $y=30x$.

(5 μονάδες)