ΔΕΙΞΤΕ ΠΟΣΟ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΟΙ ΕΙΣΤΕ (ΔΕΥΤΕΡΟ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \in \mathbb{R}.$

(10 μονάδες)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. Η συνθήκη ότι η f είναι συνεχής στο [α,β], μπορεί να αντικατασταθεί από την συνθήκη ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β);

(5 μονάδες)

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» καθένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

1. Αν η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β] , τότε η f είναι συνεχής στο [α,β].
2. Όλα τα ζεύγη συζυγών μιγαδικών με μέτρο 1, είναι αντιδιαμετρικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου.
3. Αν η παράγωγος συνάρτηση της f είναι συνεχής στο x_o, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.
4. Αν για τις συνεχείς στο [α,β] συναρτήσεις f, g ισχύει η σχέση: $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)dt,\ x \in [a,\beta]$, τότε f(x)=g(x) για κάθε $x \in [a,\beta]$.
5. Αν f συνεχής στο α, τότε $\lim_{x\to 0} f(x+a) = f(a)$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - (a+\beta)x + a}{x^2 - 2x} = \frac{5}{2}.$$

(10 μονάδες)

Β2. Να υπολογίσετε σε ποιο διάστημα πρέπει να ανήκει ο θετικός πραγματικός αριθμός α, αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2^x - a^x}{2^x + 3\cdot a^x} \right) = -\frac{1}{3}$$

(6 μονάδες)

Β3. Αν η ευθεία y=2x-3 είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης f στο συν άπειρο, να υπολογίσετε το : $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x) - \sigma\upsilon\nu x - 3x}{xf(x) - 5 - 2x^2}$

(9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x},\ x\in[-1,1]$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της.

(8 μονάδες)

Γ2. Έστω z ,w μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο.

i. Να δείξετε ότι : $\mathrm{Re}(z\overline{w})\in[-1,1]$.

(7 μονάδες)

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης: $K=|z+w|+|z-w|$

(10 μονάδες αντίστοιχα)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση

$f:[2013,2014]\to\mathbb{R}$, *συνεχής με* $f(x)\neq 0$, *καθώς και η συνάρτηση*

$g(x)=\int_{2014}^{x} f(t)dt+\int_{2013}^{x} f(t)dt,\quad x\in[2013,2014].$

Αν γνωρίζουμε ακόμα ότι το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f, τον χχ΄ και τις ευθείες χ=2013 και χ=2014 ισούται με 1 καθώς και ότι:

$\int_{2013x}^{2014x} \frac{t}{x^2}\cdot f\left(\frac{t}{x}\right)dt=1007$, τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[2013,2014]$ *ώστε* $f(\xi)=\frac{1007}{\xi}$.

(7 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g.

(7 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης g.

(4 μονάδες)

Δ4. Να υπολογίσετε το: $\int_{2013}^{2014} g(x)dx.$

(7 μονάδες)