ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που:
   1. Εφάπτεται στον yy΄ και έχει κέντρο το σημείο (2,3).
   2. Εφάπτεται στον xx΄ και έχει κέντρο το σημείο (2,3).
   3. Εφάπτεται στις ευθείες y=2x+3 , y=-2x-3 και x=4.
   4. Έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία y=2x+1 και εφάπτεται στον yy΄ στο σημείο (0,4).
   5. Έχει εφαπτόμενες τις ευθείες x=-3, x=5, y=2.
   6. Έχει διάμετρο το τμήμα AB , όπου A(-4,2), B(2,6).
   7. Τέμνει τον xx΄ στα (2,0) και (6,0) και έχει ακτίνα R=5.
   8. Διέρχεται από τα σημεία (-1,2), (-1,7) και (4,2).

2. Δίνεται η οικογένεια γραμμών C: $x^2+y^2-4\lambda x+2\lambda y+5\lambda^2-4=0$.
   1. Να δείξετε ότι η γραμμή αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε λ πραγματικό.
   2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων αυτής της οικογένειας.
   3. Να βρείτε ποιοι κύκλοι της οικογένειας εφάπτονται στον xx΄.
   4. Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων σε όλους τους κύκλους της οικογένειας που είναι παράλληλες στην ευθεία που κινούνται τα κέντρα τους.

3. Δίνεται η γραμμή με εξίσωση: $x^2+y^2-4x+2y+\lambda^2+1=0$.
   1. Να περιορίσετε κατάλληλα το λ ώστε αυτή να παριστάνει κύκλο.
   2. Να βρείτε το λ ώστε ο κύκλος να εφάπτεται στον xx΄.
   3. Να δείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι εξωτερικό σημείο για κάθε κύκλο αυτής της οικογένειας.

4. Να βρείτε τον κύκλο που έχει το κέντρο του στο 1° τεταρτημόριο, εφάπτεται στους δύο άξονες και στην ευθεία 3x-4y-12=0.

5. Να βρείτε εφαπτόμενες του κύκλου $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-4\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{y}+12=0$, οι οποίες άγονται από το σημείο A(-1,-1).

6. Να βρείτε εφαπτόμενες του κύκλου με εξίσωση $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-4\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{y}+12=0$ οι οποίες να είναι: α) Παράλληλες στον xx΄ β) Παράλληλες στον yy΄ γ) Παράλληλες στην ευθεία y=x+2.

7. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου με κέντρο πάνω στην ευθεία y=x-2, ο οποίος να εφάπτεται των ευθειών 3x-4y-1=0 και 3x-4y-7=0.

8. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η ευθεία με εξίσωση: λx-y+λ-1=0, εφάπτεται στον κύκλο: $(x-\lambda)^2+(y+1)^2=\lambda^2+1$.

9. Θεωρούμε τους κύκλους με εξισώσεις: $C: x^2+y^2=4,\ C': (x-1)^2+(y-1)^2=2.$

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.
2. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των δύο αυτών κύκλων σε ένα από τα κοινά τους σημεία.
3. Να βρείτε το μήκος της κοινής χορδής των δύο κύκλων.
4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η κοινή χορδή.

10. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία άγονται κάθετες μεταξύ τους εφαπτόμενες προς τον κύκλο με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 5$.

11. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Μ(-1,1).

12.Θεωρούμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \tau o \ \ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \ \ \mathrm{M}(\lambda - 3, \lambda + 3), \ \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι το σημείο Μ είναι εξωτερικό του κύκλου για κάθε πραγματικό αριθμό λ.
2. Από το Μ φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου και ονομάζουμε Α και Β τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο.
3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ για τους οποίους η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το σημείο Ρ(3,-1).

13. Δίνεται η εξίσωση: $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - 2\lambda \boldsymbol{x} + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο και το κέντρο του να ανήκει στην ευθεία $3x-y+\lambda^2=0$.
2. Να βρείτε τα σημεία του C που απέχουν μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από το κέντρο Ο.

14. Δίνονται οι κύκλοι: $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 4 \ \kappa\alpha\iota \ (\boldsymbol{x} - 3)^2 + (\boldsymbol{y} - 4)^2 = 9$.

1. Να δείξετε ότι αυτοί εφάπτονται εξωτερικά.
2. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης τους.
3. Να βρείτε – αν υπάρχει – κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους με συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 1.

15. Οι ευθείες :

$\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1) y + 87 = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \varepsilon_2 : (\lambda + 2) x - (\lambda + 4) y - 22 = 0$ είναι κάθετες και το σημείο Μ(μ, μ+1) ανήκει στην ε_2.

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) Έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Μ και αποκόπτει από την ευθεία ε_1 χορδή με μήκος 8. Να βρείτε :

i) Τον κύκλο C.

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α (-10,1).

16. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 4)y + 8 - \lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

α) να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Έστω ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου το κέντρο απέχει από την ευθεία ε: 3χ-4ψ+9=0 απόσταση ίση με 1/5. Να βρείτε:

i) Τον αριθμό λ

ii) Την εξίσωση ενός κύκλου C_1 που έχει κέντρο Λ(1,5) και εφάπτεται εξωτερικά στον αρχικό κύκλο.

iii) Το σημείο επαφής των δύο κύκλων καθώς και την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους στο σημείο αυτό.

17. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2\lambda x - \lambda y - 5 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε λ πραγματικό.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

γ) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που περιγράφει η παραπάνω εξίσωση διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να βρείτε.

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων καθώς και την κοινή χορδή των κύκλων.

ε) Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω κύκλους δέχεται ως εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{3}{2}$.