ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΣΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Όλες οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, εκτός – ίσως – από αυτές που έχουν στον τύπο τους κλάδους (Κ) , ρίζες (Ρ) ή απόλυτες τιμές (Α). Σε αυτές ελέγχουμε με τον ορισμό.
2. Οι παραγωγίσιμες είναι και συνεχείς, το αντίστροφο όχι απαραίτητα. Προσοχή!! Αν $\lim_{x\to x_o^-} f'(x) = \lim_{x\to x_o^+} f'(x)$ η f δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο $χ_o$.
3. Αν πρόκειται να βρείτε παράγωγο άρρητης παράστασης με πεδίο ορισμού το R, ο κλασματικός εκθέτης πιθανόν να σας δημιουργήσει πρόβλημα: Προτιμήστε να κάνετε τη συνάρτηση δίκλαδη, πχ:
   $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = \begin{cases} \sqrt[3]{(-x)^2}, & x<0 \\ \sqrt[3]{x^2}, & x\ge 0 \end{cases}$. Θυμηθείτε ακόμα ότι : $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$.
4. Η εφαπτομένη μιας καμπύλης f υπάρχει αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $χ_o$. Συνηθίστε να γράφετε την εξίσωση της εφαπτομένης στη μορφή: $y = f'(x_o)\cdot x - x_o \cdot f'(x_o) + f(x_o)$. Πολλές ασκήσεις λύνονται ζητώντας την ταύτιση της εφ/νης με δεδομένη ευθεία. Μην ξεχνάτε ότι το σύστημα μιας καμπύλης f με την εφ/νη της έχει τουλάχιστον μια λύση που είναι το σημείο επαφής.
5. Το θεώρημα Rolle εφαρμόζεται όταν α) μας το ζητούν β) Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον χχ'. Εκτός από τις δύο προφανείς περιπτώσεις, το θεώρημα εφαρμόζεται και όταν: γ) Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ρίζα σε μια εξίσωση. Βρίσκουμε την αρχική της εξίσωσης και κάνουμε Θ.R γιαυτήν δ) Αν μας ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει «το πολύ κ ρίζες». Υποθέτουμε ότι υπάρχουν (κ+1) ρίζες και κάνουμε διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος μέχρι να φθάσουμε σε άτοπο.
   Προσοχή! Όταν έχει δοθεί μια εξίσωση της μορφής $f'(x) + (\kappa\acute{\alpha}\tau\iota)\cdot f(x) = 0$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με την ποσότητα $e^{(\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\kappa\acute{\alpha}\tau\iota)}$. Έτσι το πρώτο μέλος γίνεται παράγωγος γινομένου. Επίσης, εκφράσεις του τύπου : Δείξτε ότι μεταξύ δύο ριζών μιας συνάρτησης υπάρχει ρίζα της παραγώγου της, παραπέμπει σε εφαρμογή του Θεωρήματος Rolle.
6. Το θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ) μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλες τις περιπτώσεις που έχουμε συνάρτηση συνεχή και παραγωγίσιμη και στο διάστημα που εμείς επιλέγουμε.
   Αν για μια συνάρτηση γνωρίζουμε τη μονοτονία της παραγώγου της , τότε η εφαρμογή του ΘΜΤ οδηγεί σε διπλή ανίσωση.
   Αν σας ζητούν να αποδείξετε ότι υπάρχουν $ξ_1$, $ξ_2$ στο (α, β) ώστε $\kappa f'(\xi_1) + \lambda f'(\xi_2) = \ldots$, τότε πρέπει να «σπάσετε» το [α, β] σε κατάλληλα

υποδιαστήματα. Συνήθως, είναι τα: $\left(\alpha, \frac{\kappa\alpha+\lambda\beta}{\kappa+\lambda}\right), \left(\frac{\kappa\alpha+\lambda\beta}{\kappa+\lambda}, \beta\right)$.

Αν σε προηγούμενο ερώτημα της άσκησης έχετε δείξει ότι υπάρχει $\chi_o \in (\alpha, \beta)$ για το οποίο κάτι ισχύει, τότε «σπάστε» το (α, β) στα (α, χ_o) και (χ_o, β).

Προσοχή στην περίπτωση που το ΘΜΤ εφαρμόζεται σε διάστημα της μορφής [χ, χ+1] ή [χ-1, χ] : Η συνάρτηση πρέπει να εκφρασθεί με τη βοήθεια άλλης μεταβλητής, π.χ. f(t)=lnt.

Το ΘΜΤ δίνει λύση και στην εύρεση ριζών εξίσωσης της μορφής: $7^{\chi}+9^{\chi}=5^{\chi}+11^{\chi}$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(t)=t^{x}$ και κάνετε εφαρμογή του θεωρήματος στα (5, 7) και (9, 11).

Επίσης, το ΘΜΤ χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις «απόγνωσης» ή ακόμα και σε απλές ανισώσεις.

7. Το θεώρημα Fermat, το χρησιμοποιούμε όταν γνωρίζουμε την ύπαρξη ακρότατου μιας συνάρτησης σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

   Υπενθυμίζω ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, τότε παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αν γνωρίζουμε ότι αυτές δεν εμφανίζονται στα άκρα του διαστήματος, τότε η f ΄ μηδενίζεται σε δύο εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

   Αν δίνεται ότι ισχύει μια ανίσωση και σας ζητούν να αποδείξετε μια ισότητα, τότε φέρνετε τα πάντα στο α΄ μέλος και βρίσκετε «με το μάτι» ποια τιμή μηδενίζει την παράσταση. Τότε η παράγωγος της παράστασης πρέπει να μηδενίζεται σε εκείνη την τιμή.

8. Στην εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης, εκτός της κλασσικής συνταγής (Βρίσκουμε την f΄, φτιάχνουμε πίνακα με το πρόσημο) μπορεί να προκύψουν οι παρακάτω «περίεργες» περιπτώσεις:

   α) Βρίσκω την παράγωγο, υπάρχει προφανής ρίζα της, αλλά δεν μπορώ να λύσω την ανίσωση ή να βρω πρόσημο. Τότε ή θα βρούμε τη $2^{η}$ παράγωγο ή θα θεωρήσουμε μια νέα συνάρτηση με τύπο το τμήμα της f΄για το οποίο δεν γνωρίζουμε σίγουρα το πρόσημο. Για την καινούργια συνάρτηση, πρέπει να βρείτε το σύνολο τιμών της.

   β) Βρίσκω την παράγωγο, αλλά δεν υπάρχει ούτε σταθερό πρόσημο ούτε σημείο μηδενισμού της. Ονομάστε συνάρτηση το κομμάτι της παραγώγου που δεν έχει σταθερό πρόσημο και βρείτε το σύνολο τιμών αυτής. Θα δείτε ότι η συνάρτηση έχει μέγιστο κάποιο αρνητικό αριθμό ή ελάχιστο κάποιο θετικό αριθμό, οπότε θα έχετε βρει το πρόσημό της.

   Μπορεί να χρειασθεί να φθάσετε μέχρι και την $f^{(4)}$ για να λειτουργήσουν τα προηγούμενα βήματα (α) ή (β).

   γ) Αξιοποιήστε προηγούμενα ερωτήματα του θέματος και μην ξεχνάτε ότι :

$|\eta\mu x| < |x|,\ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ \ x \neq 0,\ \ \varepsilon\nu\acute{\omega}\ \ln x < x < e^x\ \ \ \gamma\iota\alpha\ \ x > 0.$

Τέλος, θυμηθείτε ότι στον πίνακα με τα πρόσημα, πρέπει να φαίνονται ΚΑΙ οι «μεμονωμένες» τιμές που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

9. Για να δείξετε ότι υπάρχει σημείο καμπής μιας συνάρτησης, θα πρέπει να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο στο οποίο να μηδενίζεται ή να μην ορίζεται η δεύτερη παράγωγος , καθώς και ότι η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο γύρω από εκείνο το σημείο.
   Αν, αντίθετα, θέλετε να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο καμπής, μπορείτε να δείξετε κάτι από τα παρακάτω:
   α) Αν η δεύτερη παράγωγος ορίζεται παντού, αρκεί να δείξετε ότι δεν μηδενίζεται. Αν μηδενίζεται, δείξτε ότι δεν αλλάζει πρόσημο. Θυμηθείτε ότι αν η $2^η$ παράγωγος βγαίνει δευτεροβάθμια , αρκεί η διακρίνουσά της να είναι αρνητική.
   β) Μπορείτε υποθέτοντας ότι υπάρχει σημείο μηδενισμού της $2^{ης}$ παραγώγου, να καταλήξετε σε άτοπο χρησιμοποιώντας κάποιες από τις δοσμένες σχέσεις.
10. Αν δίνεται μια ισότητα που περιέχει και τη συνάρτηση f (π.χ.: $f^2(x) - 3e^x f(x) + x^2 = \ln x \cdot f(x) + \eta\mu x$) μην προσπαθήσετε να λύσετε τη σχέση ως προς f : Απλά παραγωγίστε και τα δύο μέλη της ισότητας. Στην περίπτωση που έχει δοθεί ανίσωση, μην διανοηθείτε να παραγωγίσετε τα δύο μέλη της! Είναι ΛΑΘΟΣ.
11. Αν θέλετε να βρείτε ασύμπτωτες για μια συνάρτηση, δείτε πρώτα το πεδίο ορισμού της. Από εκεί θα καταλάβετε αν πρέπει να ψάξετε για ασύμπτωτες και για το είδος τους. Στην περίπτωση που σας δίνουν έτοιμη την ασύμπτωτη μιας συνάρτησης, ουσιαστικά σας προσφέρουν τα αποτελέσματα κάποιων ορίων. Αξιοποιήστε τα για τον υπολογισμό των άλλων ορίων που σας ζητούν.
12. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή, τότε η παράγωγός της (εφόσον ορίζεται) θα είναι περιττή ή άρτια (το αντίθετο δηλαδή)
13. Για να αποδείξετε μια ανίσωση, οι τρόποι είναι οι εξής:
   α) Όλα στο $1^ο$ μέλος, συνάρτηση και βρείτε μονοτονία. Ξεκινήστε στη συνέχεια από κατάλληλη ανίσωση με το χ και εφαρμόστε την συνάρτηση και στα δύο μέλη.
   β) Όλα στο $1^ο$ μέλος, συνάρτηση και εντοπίστε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της. Γράψτε την αντίστοιχη ανίσωση.
   γ) Αν γνωρίζετε την κυρτότητα και έχετε βρει την εφαπτόμενη ευθεία της, θυμηθείτε ότι η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη αν η f είναι κυρτή και «κάτω» από την εφαπτομένη αν η f είναι κοίλη.
   δ) Αν γνωρίζετε τη μονοτονία της f ΄ , εφαρμόστε θεώρημα Μέσης Τιμής.

ε) Αν η ανίσωση περιέχει ολοκλήρωμα, θυμηθείτε ότι:

$Αν \quad f(x) \geq g(x) \quad τότε \quad \int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$

$Αν \quad f(x) \in [m, M], \quad τότε \quad m(\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

ε) Ελέγξτε μήπως η ανίσωση είναι προφανής, για παράδειγμα $e^{e^x} - 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ή μήπως μπορείτε να την υπολογίσετε με μεθόδους Α΄ Λυκείου ή Β΄ Λυκείου, όπως ας πούμε ότι:

$1 + \frac{1}{x^2} \geq \frac{2}{x}, \quad -1 \leq \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \leq 1$ κ.λ.π

14. Ύπαρξη ρίζας: Υπάρχουν ακριβώς 4 τρόποι για να δείξετε κάτι τέτοιο:

α) Προφανής ρίζα.

β) Θ. Bolzano για τη συνάρτηση.

γ) Θ. Rolle για την αρχική της. (Θυμίζω ότι αρχική της f είναι η $\int_\alpha^x f(t)\,dt$)

δ) Εύρεση του συνόλου τιμών της. Χρονοβόρο, αλλά αποτελεσματικό αφού μεταξύ άλλων δείχνει και πόσες ρίζες υπάρχουν).

15. Μοναδικότητα ρίζας: α) Μονοτονία β) Δεχθείτε ότι υπάρχει κι άλλη, κάντε Θ.Rolle, βγείτε σε άτοπο γ) Αν η ύπαρξη έχει δειχθεί με τη βοήθεια του συνόλου τιμών, έχετε ήδη ξεμπερδέψει (αφού η f είναι κατά διαστήματα μονότονη).