ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ- BOLZANO – Θ.Ε.Τ

1. Όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, εκτός (ίσως) από όσες ορίζονται με κλάδους και μόνο για τα σημεία όπου αλλάζει ο τύπος της. Ελέγχουμε εκεί με τον ορισμό.
   Αν η συνάρτηση περιέχει παραμέτρους στον τύπο της και δίνεται ότι είναι συνεχής, απαιτούμε να υπάρχει το όριο (ίσως με πλευρικά) και να ισούται με την τιμή της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο. Προσέξτε τη δικαιολόγηση ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής και προσπαθήστε να είστε σαφείς. Για παράδειγμα η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\dfrac{e^x+2}{x^3+x+1}$ είναι συνεχής, ως πηλίκο εκθετικής με πολυωνυμική.
   Μπάρλας: 4-13/227-229 Παπαδάκης: 15,22-25/329-331

2. Αν μας ζητούν την τιμή $f(x_o)$ και γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$. Λύστε τη σχέση που σας έχουν δώσει ως προς f(x) και υπολογίστε το όριο. Εννοείται ότι ακολουθούμε το παραπάνω σενάριο , μόνο αν η αντικατάσταση δεν είναι δυνατή.
   Μπάρλας: 14-18/229 Παπαδάκης: 32-35/331-332

3. Αν σας δίνουν μια συναρτησιακή σχέση με ανίσωση, χρησιμοποιήστε κριτήριο παρεμβολής (με απόλυτη τιμή, εγκλωβίστε την) ή πάρτε δύο περιπτώσεις διαιρώντας με κατάλληλη ποσότητα.
   Μπάρλας: 19-25/230 Παπαδάκης: 37,38,44,45,46,64/333,335

4. Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη, τότε είναι 1-1 , άρα αντιστρέψιμη και οι f, f^{-1}, έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, θυμίζω:
   Έστω ότι f είναι γνήσια φθίνουσα και
   $x_1<x_2,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2))\xleftrightarrow{f\searrow} f^{-1}(x_1)>f^{-1}(x_2)$
   Την παραπάνω σχέση πρέπει να την αποδεικνύετε κάθε φορά που θέλετε να την χρησιμοποιήσετε!

5. Το ΘΒ χρησιμοποιείται για να βεβαιώσουμε την ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης. Στην εξίσωση που μας ενδιαφέρει, φέρνουμε τα πάντα στο 1ο μέλος, ονομάζουμε συνάρτηση και προσπαθούμε γιαυτήν να εφαρμόσουμε το θεώρημα, στο διάστημα που μας δίνουν ή που εμείς επινοούμε. Στον τύπο της εξίσωσης, θυμηθείτε να αντικαταστήσετε τα άλλα γράμματα (x_o, ξ, γ) με τη μεταβλητή χ. Αν το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι η ρίζα ανήκει σε κλειστό διάστημα, ας πούμε το [α,β], θα

χρειασθεί να εξετάσετε χωριστά τις περιπτώσεις f(α)=0 ή f(β)=0. Αν πρέπει να δείξετε ότι υπάρχουν πάνω από μία ρίζες, εφαρμόστε το ΘΒ σε παραπάνω από ένα διαστήματα. **<u>Το ΘΒ δεν μπορεί από μόνο του να δείξει μοναδικότητα ρίζας – χρησιμοποιήστε μονοτονία ή το βαθμό του πολυωνύμου για να το καταφέρετε.</u>**

Προσοχή: Αν γνωρίζετε για μια συνάρτηση f ότι $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$, μπορείτε να ισχυριστείτε ότι υπάρχει κάποια τιμή α κοντά στο x_o, τέτοια ώστε f(α)>0. Ισχύει αντίστοιχη σχέση αν το όριο είναι μείον άπειρο.

Μπάρλας: 6-44/256-261

Παπαδάκης: 28,30-33, 42-44, 50,51,58,71,72/348-353

6. Μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της. Σε κάθε διάστημα από το πεδίο ορισμού, εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

$$\begin{cases} \text{Αν} \quad x\in[\alpha,\beta] \\ \quad \kappa\alpha\iota \\ f\ \gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi. \end{cases} \tau\acute{o}\tau\varepsilon \ \ f(x)\in\left[f(a),f(\beta)\right] \qquad \begin{cases} \text{Αν} \quad x\in[\alpha,\beta] \\ \quad \kappa\alpha\iota \\ f\ \gamma\nu.\ \varphi\theta\iota\nu. \end{cases} \tau\acute{o}\tau\varepsilon \ \ f(x)\in\left[f(\beta),f(\alpha)\right]$$

$$\begin{cases} \text{Αν} \quad x\in(\alpha,\beta) \\ \quad \kappa\alpha\iota \\ f\ \gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi. \end{cases} \tau\acute{o}\tau\varepsilon \ \ f(x)\in\left(\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\lim_{x\to\beta^-} f(x)\right) \qquad \kappa.o.\kappa$$

7. Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης, αξιοποιούμε τις γνωστές μας- ως προς τη μονοτονία – συναρτήσεις και θυμηθείτε: Το άθροισμα δύο ίδιας μονοτονίας συναρτήσεων ή η σύνθεση γνησίως μονότονων συναρτήσεων δίνει συνάρτηση με γνωστή μονοτονία. Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη , τότε είναι 1-1, άρα μπορείτε να λύνετε ανισώσεις και εξισώσεις της μορφής: $f(A) > f(B) \xrightarrow{f\swarrow} A < B$, όπου βέβαια τα Α και Β είναι παραστάσεις με χ.

8. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλαδή παίρνει μόνο θετικές ή μόνο αρνητικές τιμές. Αν λοιπόν για μια τέτοια συνάρτηση γνωρίζετε και μια τιμή της, τότε ξέρετε ότι και όλες οι υπόλοιπες τιμές της έχουν το ίδιο πρόσημο.

Μπάρλας: 52-58/262 **Παπαδάκης: 15-20,24,25/365-366**

9. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β] , τότε οι τιμές ανήκουν επίσης σε κλειστό διάστημα, ας το πούμε [m, M], δηλαδή η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (υπάρχουν τιμές $χ_1$, $χ_2$ τέτοιες ώστε $f(x_1)=m \ \ και \ \ f(x_2)=M$). Προσοχή!! Η εικόνα ενός ανοικτού διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης δεν είναι απαραίτητα ανοικτό διάστημα. Στο θεώρημα αυτό καταφεύγουμε μόνο αν το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα και δε γνωρίζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης (αν τη γνωρίζουμε, βρίσκουμε το σύνολο τιμών- θυμάστε πώς;).

10. Για να χρησιμοποιήσουμε το Θ.Ε.Τ. , πρέπει προηγουμένως να έχουμε βρει ή το σύνολο τιμών της συνάρτησης ή να έχουμε χρησιμοποιήσει το (5) δηλαδή να πούμε ότι το σύνολο τιμών είναι το [m, M] ή έστω να γνωρίζουμε τα f(α) και f(β). Τότε, για οποιαδήποτε τιμή y_o μέσα από το σύνολο τιμών ή μεταξύ των f(α) και f(β), υπάρχει μία τουλάχιστον τιμή $χ_o$ από το πεδίο ορισμού ώστε να ισχύει $f(x_o)=y_o$. Όταν το ζητούμενο είναι να δείξετε ότι υπάρχει χο τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{k_1 f(x_1)+k_2 f(x_2)+...+k_v f(x_v)}{k_1+k_2+...+k_v}$ (*), βρείτε το σύνολο τιμών [m, M] ,φτιάξτε ανισώσεις του στυλ: $k_1 m \le k_1 f(x_1) \le k_1 M$, προσθέστε κατά μέλη και διαιρέστε τα πάντα με την κατάλληλη ποσότητα. Τότε το 2° μέλος της (*) θα έχει βρεθεί ανάμεσα στα m και M, οπότε σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ θα υπάρχει $χ_o$ ώστε να ισχύει η (*).

Μπάρλας: 64-75/ 263-265 **Παπαδάκης: 34-49,51-53 / 369-370**

Υπενθυμίσεις από το κεφάλαιο των ορίων:

11. Σε όρια που περιέχουν παράμετρο, ξεκαθαρίστε πρώτα αν είστε στην περίπτωση (0/0) ή (α/0) και δουλέψτε αναλόγως. Θυμηθείτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Επίσης τα όρια εκθετικών (όταν $x \to \infty$) υπολογίζονται βγάζοντας κοινό παράγοντα αυτόν με τη μεγαλύτερη βάση όταν το χ τείνει στο συν άπειρο ενώ αυτόν με τη μικρότερη βάση όταν το χ τείνει στο πλην άπειρο.

12. Σε όρια άρρητων παραστάσεων όταν το χ τείνει στο άπειρο, η απροσδιοριστία άπειρο προς άπειρο αίρεται βγάζοντας κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο. Σε απροσδιοριστία της μορφής άπειρο μείον άπειρο, κάνετε συζυγή μόνο αν το αλγεβρικό άθροισμα των μεγιστοβάθμιων είναι μηδέν, αλλιώς βγάλτε κοινό παράγοντα όπως και στην πρώτη περίπτωση.

13. Όταν πρέπει να βρείτε όριο παραστάσεων που περιέχουν διαφορετικά ριζικά διαφορετικών τάξεων, σπάστε το αρχικό όριο σε άθροισμα άλλων διαχωρίζοντας τα ριζικά ή ακόμα και προσθαφαιρώντας κατάλληλο αριθμό ή παράσταση με χ.