ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ στους ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Α. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1.Περιγράψτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και δώστε τους ορισμούς της πρόσθεσης, του πολ/σμού και της ισότητας δύο μιγαδικών αριθμών.(Σελ. 86-87, τα μπλε πλαίσια και σελ.88-89 τους ορισμούς).

2.Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δύο μιγαδικών αριθμών.(Σελ. 88-89, συνοδέψτε με σχήμα).

3.Εξηγείστε γιατί το i^{v} υπολογίζεται με τη βοήθεια του υπολοίπου της διαίρεσης του ν με τον αριθμό 4.(Σελ. 90)

4.Να αναφέρετε τις ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών που αφορούν το άθροισμα και τη διαφορά δύο συζυγών και να απεικονίσετε στο επίπεδο τις εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών, εξηγώντας τη συμμετρία τους ως προς τον xx΄.(Σελ. 91)

5.Να αποδείξετε ότι : $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.Πώς μπορείτε να γενικεύσετε τις παραπάνω ιδιότητες για παραπάνω από δύο μιγαδικούς; (Σελ. 91).

6.Να επιλύσετε την εξίσωση $az^2+\beta z+\gamma=0,\ a,\beta,\gamma\in\Re,\ z\in C.$ **(Σελ. 92).**

7.Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού και να αποδείξετε ότι: $|z|=|-z|=|\overline{z}|,\ |z|^2=z\cdot\overline{z},\ \ |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\ \ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$ **(Σελ. 97-98).**

8.Να περιγράψετε με σχέσεις μιγαδικών την «τριγωνική ανισότητα» και να την ερμηνεύσετε γεωμετρικά.(Σελ. 98)

9.Να εξηγήσετε γιατί ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-z_0|=p$, $p>0$ είναι κύκλος.(Σελ. 98)

10.Να εξηγήσετε γιατί ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z-z_1|=|z-z_2|$ είναι η μεσοκάθετη ευθεία του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις εικόνες των z_1,z_2.(Σελ.98,99).

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Οι συμβουλές δεν αποτελούν «νόμο απαράβατο» και βέβαια δεν έχουν σκοπό να σας στερήσουν την πρωτοβουλία για διαφορετική προσέγγιση των ασκήσεων. Στα πρώτα σας βήματα όμως στους μιγαδικούς, είναι χρήσιμο να τις ακολουθείτε κατά το δυνατόν ώστε να αποφύγετε ταλαιπωρίες και «πελαγοδρομήσεις».Αργότερα , ελπίζω να μπορέσετε να αναπτύξετε και δικούς σας τρόπους δουλειάς ,έτσι ώστε πολύ αργότερα να συνειδητοποιήσετε και μόνοι σας ότι κάθε φορά που κάνετε κάτι διαφορετικό από αυτά που παρακάτω περιγράφονται, απλώς καθυστερείτε.
Θα χαρώ αν με διαψεύσετε, προτείνοντας κάτι καλύτερο.
Στο τέλος κάθε συμβουλής, υπάρχει παραπομπή σε αντίστοιχη άσκηση του σχολικού σας βιβλίου (για παράδειγμα η έκφραση Α5/95 σημαίνει την 5η άσκηση της πρώτης ομάδας στη σελίδα 95). ενώ στη συνέχεια παραπομπή σε αντίστοιχες ασκήσεις από το βιβλίο του Βασίλη Παπαδάκη και τέλος παραπομπή από το βοήθημα του Μπάρλα.

1. Αν σας ζητούν να αποδείξετε ότι μια παράσταση με μιγαδικούς είναι τελικά πραγματικός ή φανταστικός αριθμός, χρησιμοποιείστε τις ισοδυναμίες:

$z \in \Re \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad και \quad z \in I \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$.
Βρίσκονται σαν συμπέρασμα εύκολης άσκησης του σχολικού βιβλίου και κατά συνθήκη τις χρησιμοποιούμε σαν θεωρία. Θα κάνετε το ίδιο ακόμα και στην περίπτωση όπου είναι δεδομένο πως μια παράσταση που περιέχει και μιγαδικούς ανήκει στο R ή στο I και σας ζητούν να αποδείξετε μέσω αυτού μια ισότητα ή ακόμα και να υπολογίσετε το μέτρο ενός μιγαδικού. (Β8/97,Β2/101,Β4/102). (Παπ: 3.22- και 3.33, 6.39,6.42, 6.43, 6.48, 6.49) (Μπ: 42- και 49/ σελ 33)

2. Οσον αφορά τις δυνάμεις του στυλ $i^{ν}$, υποτίθεται ότι πρέπει να ασχοληθείτε μόνο με το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 4.Οπως λοιπόν γνωρίζετε, αυτό που έχει τελικά σημασία είναι τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού ν. Διαιρέστε λοιπόν ΜΟΝΟ ΑΥΤΑ με το 4 και βρείτε έτσι κατευθείαν το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 4.Για παράδειγμα, όταν ο εκθέτης είναι 23124, το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 4 είναι 0 και συνεπώς $i^{23124}=1$, ενώ $i^{23125}=i$, $i^{23126}=-1$ κ.λ.π.. (Α8/95,Β4/96) (Παπ: 2.20, 2.21, 2.28, 2.31) (Μπ: 16, 17/σελ30)

3. Το άθροισμα τετραγώνων, όταν πρόκειται για πραγματικούς αριθμούς, δεν μας δίνει την ευχέρεια να χρησιμοποιήσουμε κάποια ταυτότητα. Στους μιγαδικούς όμως, το $z^2+w^2=z^2-(iw)^2=(z-iw)(z+iw)$.Αυτή η «διαφορά» τετραγώνων που δημιουργούμε είναι εξαιρετικά χρήσιμη στη λύση εξισώσεων. (Α12γ/96). (Παπ: 4.19, 4.20) (Μπ: 65/σελ. 35)

4. Συνηθίστε να χρησιμοποιείτε την ιδιότητα $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, καθώς και τις σχέσεις: $z + \bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}z$, $z - \bar{z} = 2yi = 2\mathrm{Im}z \cdot i$. Όταν έχετε παρονομαστή μιγαδικό και πολλαπλασιάζετε με τη συζυγή παράσταση ,μάθετε να βρίσκετε κατευθείαν το αποτέλεσμα: (3+4i)(3-4i)=25, (-2+3i)(-2-3i)=13 κ.λ.π..
Όσες «θεωρητικές» ασκήσεις έχετε να αντιμετωπίσετε και περιέχουν μέτρα μιγαδικών, βγαίνουν υψώνοντας τα μέτρα στο τετράγωνο.
Ακόμα και σε ασκήσεις όπου ζητείται ο γ.τ των εικόνων κάποιων μιγαδικών, στις οποίες υποχρεωτικά σε κάποια φάση θέτουμε z=x+yi, είναι προτιμότερο να έχουμε πρώτα διώξει μιγαδικούς παρονομαστές και να έχουμε κάνει πολ/μους επιμεριστικά με τη βοήθεια συζυγών.(Β6/96,Β9/97,Α9/101,Β6/102). (Παπ: Δεκάδες…) (Μπ: Πάρα πολλές…)

5. Από τις λίγες περιπτώσεις που ξεκινάμε θέτοντας z=x+yi ,είναι όταν έχουμε να λύσουμε εξίσωση ή σύστημα στο οποίο συνυπάρχουν οι ποσότητες z και |z| ή $\bar{z}$.(Α3/101),
(Παπ: 4.12- 4.15, 4.24). Επίσης θυμηθείτε ότι αν ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον μιγαδικό z, θα έχει ρίζα και τον συζυγή του z. Μπορείτε έτσι να δημιουργείτε από μια ισότητα δύο εξισώσεις και να λύνετε το αντίστοιχο σύστημα. Στις περιπτώσεις που έχετε τριώνυμα (Προσοχή! Τα α, β, γ να είναι πραγματικοί αριθμοί) των οποίων η λύση ζητείται στο *C*, οι τύποι για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ισχύουν αναλλοίωτοι. Χρησιμοποιήστε τους και αφήστε

κάτι σκέψεις του στυλ « Κι αν δεν το έβλεπα; Δεν βγαίνει η άσκηση και κανονικά με τους τύπους των ριζών; ».
(Παπ: 4.18-4.29, 4.32, 4.37, 4.44, 4.45) (Μπ: 32-και 41/σελ. 32, 10,11/σελ. 59-60)

6. Προσοχή στη σχέση $|z|^2=1$ ή $|z|=1$. Είναι ισοδύναμη με την σχέση $z=\frac{1}{\bar{z}}$ την οποία μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κατευθείαν σε αντικαταστάσεις. Επίσης ισχύει ότι : $|z|=p \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=p^2 \Leftrightarrow z=\frac{p^2}{\bar{z}}$ Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να «περιγραφτούν» ως εξής: Η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1 ή ακτίνας p . Επίσης, χρησιμοποιώντας την ισότητα $|z|=|\bar{z}|$, έχουμε ένα καλό τρόπο να ξεκινάμε ασκήσεις όπου δίνεται το μέτρο ενός αθροίσματος και ζητείται το μέτρο ενός άλλου αθροίσματος: (Παπ: 6.59-6.69) (Β2/101,Β10/102) (Μπ: 16- και 21, 24- και 28/σελ. 59,60 66,67,68/σελ. 66)

7. Μην ξεχνάτε ότι η παράσταση $|z-w|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z,w, στο μιγαδικό επίπεδο. Παρατήρηση πολύ χρήσιμη αν πρόκειται να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά μια σχέση. Ακολουθούν οι πιο γνωστές γεωμετρικές ερμηνείες που οφείλετε άλλωστε να γνωρίζετε και σαν θεωρία:
Α1. $|z-z_o|=\rho,\ \rho>0$. Ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z ,είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του γνωστού z_o και ακτίνα ρ.
Α2, $|z-z_o|\le\rho,\ \rho>0$. Ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z ,είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο την εικόνα του z_o και ακτίνα ρ.
Α3. $|z-z_0|>\rho,\ \rho>0$. Ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z ,είναι όλο το επίπεδο εκτός των σημείων του κυκλικού δίσκου της προηγούμενης περίπτωσης.
Α4. $|z-z_1|=k|z-z_2|, k>0, k\neq 1$. Ο γ.τ των εικόνων του z προκύπτει τελικά κύκλος, πιο γνωστός σαν Απολλώνιος κύκλος, του οποίου όμως το κέντρο και την ακτίνα είσθε υποχρεωμένοι να υπολογίσετε με πράξεις.
Α5. $r\le|z-z_o|\le R,\ \mu\varepsilon\ r,R>0$. Ο γ.τ των εικόνων του z είναι ο κυκλικός δακτύλιος που περιλαμβάνεται μεταξύ των κυκλικών δίσκων με κέντρο την εικόνα του z_o και ακτίνες r και R αντίστοιχα.

Β1. $|z-z_1|=|z-z_2|$. Ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z ,είναι η μεσοκάθετη ευθεία του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις εικόνες των γνωστών z_1,z_2.
Β2. $|z-z_1|<|z-z_2|$. Ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z , είναι ημιεπίπεδο. Βρείτε την εξίσωση ευθείας που προκύπτει δουλεύοντας σαν να υπήρχε ισότητα και αφού φτιάξετε την γραφική παράσταση της ευθείας, επιλέξτε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου που να μην βρίσκεται στην ευθεία και αντικαταστήστε τις συντεταγμένες του στην ανίσωση που είχατε. Αν σας προκύπτει σωστή σχέση, το σημείο βρίσκεται στο σωστό ημιεπίπεδο, διαφορετικά βρίσκεται στο λάθος ημιεπίπεδο, οπότε επιλέγετε το άλλο!

Γ. $|z-\gamma|+|z+\gamma|=2\alpha$, με $\gamma<\alpha$. Ο γ.τ είναι έλλειψη με εστίες στον χ'χ και $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.
$|z-\gamma i|+|z+\gamma i|=2\alpha$, με $\gamma<\alpha$. Ο γ.τ είναι και πάλι έλλειψη με εστίες στον ψ'ψ.
Δ. $||z-\gamma|-|z+\gamma||=2\alpha$ ή $||z-\gamma i|-|z+\gamma i||=2\alpha$ με $\gamma>\alpha$. Ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z , είναι υπερβολή με τις εστίες της στον χ'χ ή στον ψ΄ψ αντίστοιχα. Υπενθυμίζω ότι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$. (Α9/101,Β5/102,Β7/102). (Παπ: 7.25-7.40 και 7.51-7.62) (Μπ: 50-75/σελ. 34-36 και 53- και 83/σελ. 65-68)

8. Οταν γνωρίζουμε ότι δύο σημεία βρίσκονται σε κύκλο ή ακόμα και σε κυκλικό δίσκο, η μέγιστη απόσταση που μπορεί να τα χωρίζει ισούται με τη διάμετρο του κύκλου ή του κυκλικού δίσκου. Για παράδειγμα ,αν z_1,z_2 είναι σημεία του γ.τ που προκύπτει από τη σχέση $|z-z_o|=\rho$ ή $|z-z_o|\leq\rho$, τότε ισχύει γιαυτά ότι: $|z_1-z_2|\leq 2\rho$. Αντίστοιχα, αν δύο σημεία βρίσκονται πάνω σε έλλειψη, για την απόσταση τους $|z_1-z_2|$, ισχύει ότι: $2\beta\leq|z_1-z_2|\leq 2\alpha$.
(Υποερωτήματα υπάρχουν σε διάφορες ασκήσεις στα δύο βοηθήματα)

9. Αν για δύο μιγαδικούς z,w με εικόνες τα σημεία Α,Β γνωρίζουμε ότι : $|z+w|=|z|+|w|$,τότε τα διανύσματα θέσης τους $\vec{OA},\vec{OB}$, είναι ομόρροπα ,ενώ αν ισχύει η σχέση: $|z+w|=|\,|z|-|w|\,|$, τότε τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης τους είναι αντίρροπα. Αυτά αποδεικνύονται αν θεωρήσετε τις εικόνες των αντίστοιχων μιγαδικών στην μορφή (χ,ψ) και δουλέψετε με τη βοήθεια διανυσμάτων – άλλωστε αυτό είναι πάντα το πρώτο βήμα όταν θέλουμε να αναφερόμαστε σε διανύσματα . Θυμηθείτε ότι ο έλεγχος για παράλληλα διανύσματα πρέπει να γίνεται με ορίζουσες και όχι με συντελεστές διεύθυνσης. Επίσης , όταν μας ζητούν να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο, ας πούμε, τότε ζητάμε $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$. Τέλος, για τρίγωνα που πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι ισοσκελή ή ισόπλευρα, χρησιμοποιήστε το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών για να συμβολίσετε έτσι το μήκος μιας πλευράς του τριγώνου. (Β3/111). (Παπ: 7.18-7.24, 7.38, 7.57) (Μπ: 30,31/σελ. 62, 42/σελ. 63)

10. Προσέξτε κάποια ζητούμενα που προκύπτουν με αναπάντεχο τρόπο. Αν για παράδειγμα σας ζητούν να δείξετε ότι $\operatorname{Im}(z\overline{w})=0$, τότε μπορείτε ισοδύναμα να δείξετε ότι : $z\overline{w}=\overline{z}w$.(Αν δεν καταλάβατε ακόμα το γιατί, κοιτάξτε τη 1η συμβουλή).(Β3/111).
Τελείως ανάλογα αποδεικνύεται η ισοδυναμία: $\operatorname{Re}(z\overline{w})=0\Leftrightarrow \overline{z}w+z\overline{w}=0$. Επίσης, κάθε φορά που σας ζητούν να αποδείξετε σχέση που περιέχει την ποσότητα Re(f(z)), πολλαπλασιάστε με το 2 και αντικαταστήστε: $2\operatorname{Re}(f(z))=f(z)+\overline{f(z)}$
Ανάλογα, αν έχετε την ποσότητα Im(f(z)), πολλαπλασιάστε τα πάντα με 2i και αντικαταστήστε: $2\operatorname{Im}(f(z))\cdot i=f(z)-\overline{f(z)}$ (Παπ: 3.34-3.37)

11. Το μέτρο ενός μιγαδικού, δίνει την απόσταση της εικόνας του από το (0,0).Σε περίπτωση όπου σας ζητηθεί από το σύνολο των σημείων ενός γ.τ. ,να βρείτε ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο ή ελάχιστο μέτρο, εκφράστε το μέτρο ενός

μιγαδικού σαν συνάρτηση μιας μεταβλητής, θεωρείστε συνάρτηση την απόσταση του από το (0,0) και βρείτε το ακρότατο με τη βοήθεια της ανάλυσης.
Αν ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος χρησιμοποιήστε Γεωμετρία: Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει το κέντρο του κύκλου με το (0,0) και στην συνέχεια πάρτε σύστημα της ευθείας που βρήκατε με τον κύκλο που είχατε. Το σύστημα θα έχει (προφανώς) δύο λύσεις. Οι συντεταγμένες κάθε λύσης θα δίνουν μιγαδικό του οποίου η απόσταση από το κέντρο θα είναι η ελάχιστη και η μέγιστη αντίστοιχα.
Η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση σημείων που ανήκουν σε δύο κύκλους, είναι ίση με : (ΚΛ+r+R) ή (KL-R-r) , όπου ΚΛ η διάκεντρος, και R, r οι ακτίνες των δύο κύκλων.
Η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση σημείου που ανήκει σε κύκλο από μια ευθεία, βρίσκεται εύκολα αν βρείτε την απόσταση του κέντρου από την ευθεία και σε αυτό προσθέσετε ή αφαιρέσετε την ακτίνα του κύκλου. Θυμίζω: Αν η ευθεία είναι η Αχ+Βψ+Γ=0 και ο κύκλος έχει κέντρο το (χ_o,ψ_o) η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με:

$$d = \frac{|Ax_o + B\psi_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(Α7/101). (Παπ: 7.41-7.50) (Μπ: 58,59, 74, 75, 76, 78, 82, 83/ σελ.63-68)

12. Υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί (αντισυζυγείς τους λέει ο Μπάρλας) που συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $z = i \cdot w \quad ή \quad z = -iw$. Για παράδειγμα, οι ποσότητες: $a + \beta i,\ \beta - ai \quad ή \quad \alpha - \beta i,\ \beta + ai$. Εκμεταλλευτείτε το, βγάζοντας κοινό παράγοντα το i ή το (-i) και απλοποιώντας κατάλληλα στη συνέχεια. Κάντε το ίδιο αν έχετε να υπολογίσετε το άθροισμα ίδιων μεγάλων δυνάμεων παραστάσεων της μορφής: $(\boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{i})^{\nu} + (\gamma + \delta \boldsymbol{i})^{\nu}$, εντοπίστε την σχέση που συνδέει τις βάσεις τους: Μήπως ας πούμε η παράσταση (γ+δi) προκύπτει από την (α+βi) πολλαπλασιασμένη με (i) ή με –i. (Β3,Β5/96) και (Παπ: 2.32, 2.56, 5.28) (Μπ: 15, 24, 26, 28/ σελ. 30,31)
13. Θυμηθείτε και αξιοποιήστε ότι:

$$\left(1+i\right)^2 = 2i,\ \left(1-i\right)^2 = -2i,\ \acute{\alpha}\rho\alpha \quad (a \pm ai)^2 = \pm 2a^2 i$$

(Παπ: 2.35, 6.16γ,) (Μπ: 19, 25, 27/σελ. 30, 32i/σελ. 62)

14. Όταν αντιμετωπίζετε ασκήσεις «Θεωρητικές» που περιέχουν μέτρα μιγαδικών, υψώστε στο τετράγωνο και χρησιμοποιήστε τη σχέση: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Αν επιπλέον ζητείται η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης, φροντίστε να μεταφράσετε χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις της συμβουλής με αριθμό 7. Θυμηθείτε ακόμα ότι η παράσταση |z-w| εκφράζει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία –εικόνες των μιγαδικών z και w.(Α9/101,Β7/102) και (Παπ: 6.38-6.49) (Μπ: 8, 9, 16/σελ. 58,59)

15.Οταν αντιμετωπίζετε «υπολογιστικές» ασκήσεις , ελέγξτε μήπως υπάρχουν συζυγείς παραστάσεις μιγαδικών που σας διευκολύνουν σε πράξεις ή ακόμα δουλέψτε ονομάζοντας κάποια από αυτές w και τη συζυγή της που έχετε εντοπίσει $\overline{w}$. (Α11/96).

16.Όταν έχετε να αντιμετωπίσετε άθροισμα δυνάμεων του i, οι οποίες αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, θυμηθείτε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου, δίνεται από τον τύπο: $S_\nu = \frac{a_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$.

17. Όταν με δεδομένη μια σχέση, ας πούμε : |z-2+3i|=7, σας ζητούν να αποδείξετε μια άλλη, για παράδειγμα : |z-5+7i|<12, χρησιμοποιήστε τριγωνική ανισότητα ως εξής:

$|z-5+7i| = |z-2+3i+(-3+4i)| \le |z-2+3i| + |-3+4i| = 12.$

(Μπ: 43/σελ. 64) (Παπ: 6.83)

18.Όταν είναι δεδομένη μια ισότητα μιγαδικών, έχετε δικαίωμα να βάλετε μέτρα και στα δύο μέλη της ισότητας. Αυτό συνήθως το κάνουμε όταν η δεδομένη ισότητα περιέχει μεγάλη δύναμη ή εκθέτη με ν. Αν έτσι οδηγηθείτε σε ισότητα του στυλ: $|z|^\nu=|w|^\nu$, έχετε δικαίωμα να παραλείψετε τον εκθέτη αφού οι βάσεις είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Προσοχή !!! Δεν έχετε δικαίωμα όταν σας δίνουν μια ισότητα με μέτρα, να τα παραλείψετε και να βρεθείτε σε ισότητα με τα περιεχόμενα των μέτρων. (Παπ: 6.70-6.78) (Μπ: 33-37/σελ. 62)

19. Αν μια άσκηση ξεκινά με σχέση της μορφής $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, συνήθως λειτουργούμε ως εξής: Αφήνουμε διαδοχικά κάθε έναν από τρεις στο πρώτο μέλος, βάζουμε μέτρα και στα δύο μέλη και στη συνέχεια υψώνουμε στο τετράγωνο ή υψώνουμε απλώς στο τετράγωνο και τα δύο μέλη χωρίς προηγουμένως να βάλουμε μέτρα. Ομοίως δρούμε και αν κάποιος από τους τρεις μιγαδικούς της αρχικής σχέσης έχει πραγματικό συντελεστή. Θυμηθείτε ότι και στα διανύσματα στη Β΄Λυκείου , κάνατε κάτι αντίστοιχο. Οι σχέσεις που θα βρείτε για τον z_1 , ας πούμε, ισχύουν κυκλικά και ομοίως για τους z_2 και z_3 , δεν χρειάζεται να αποδείξετε τα ίδια πράγματα από την αρχή. (Παπ: 6.67) (Μπ: 29, 30/σελ. 62)

20. Αν σας ζητούν να βρείτε γ.τ δίνοντας μια σχέση με z και w, ονομάστε τον «γνωστό» σας μιγαδικό (α+βi) και κρατήστε το συμβολισμό (x+yi) για αυτόν του οποίου τελικά ζητάτε το γεωμετρικό τόπο. Υπάρχει περίπτωση όμως να προκύπτει και πολύ ευκολότερα, αν γνωρίζετε για παράδειγμα ότι ο z ανήκει σε κύκλο και σας δίνουν μια σχέση που συνδέει τα z,w ζητώντας το γ.τ των w, ξαναδημιουργήστε την αρχική σχέση. Αν, ας πούμε ,ισχύει |z-2+3i|=4 και w-z=1+i , η δεύτερη σχέση γράφεται w-1-i=z άρα w-3+2i=z-2+3i , οπότε βάζοντας μέτρα και στα δύο μέλη έχουμε |w-3+2i|=|z-2+3i|=4 δηλαδή ο γ.τ των w είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(2,-3) και ακτίνα 2. (Παπ:7.33, 7.34, 7.35, 7.45, 7.46, 7.49, 7.53) (Μπ: 63, 69, 70/ σελ. 66).