

Εκθετική συνάρτηση

1. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} η συνάρτηση $f(x) = (a^2 - a)^x$. Για ποιες από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι

- α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1-5a}{a+1}\right)^x$

- α) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το \mathbb{R}
β) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση f είναι:

- i) γνησίως φθίνουσα \mathbb{R} ii) γνησίως αύξουσα \mathbb{R}

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x + 1 = 0$ ii) $\frac{e^x}{3} + 1 = 0$ iii) $13^{x^2-4x} - 1 = 0$ iv) $1 - e^{|x|-2} = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4\sqrt[4]{8^{x+1}} = \sqrt{2}$ ii) $\sqrt[3]{2^{2x+1}} = \sqrt[4]{8^{x-2}}$ iii) $\sqrt[3]{2^{x+1}} \sqrt{2^x} = 2$ iv) $\sqrt[4]{2^{x^2+5}} = 2\sqrt{2 \cdot 2^x}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{x+1} + 8 \cdot 2^{x-2} = 16$ ii) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+2} = 36$ iii) $2^{x-1} + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 10$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ ii) $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$
iii) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$ iv) $3 \cdot 2^{4x} - 5 \cdot 4^x = 2$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{x+2} + 3 = 2^{-x}$ ii) $3^{x+2} + 3^{1-x} = 28$ iii) $2^{1-x} - 2^{1+x} = 3$ iv) $e^{2x} + 3 = 4 \cdot e^{-2x}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3^{\sqrt{x}} + 3^{4-\sqrt{x}} = 18$ ii) $2^{6+\sqrt{x}} + 2^{-\sqrt{x}} = 16$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ ii) $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$ iii) $e^{3x} + 5e^{2x} = 6e^x$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3^{3x} - 3^{2x} - 3^{x+1} + 3 = 0$ ii) $10^{2x} - 4 \cdot 5^{2x} - 2^{2x} + 4 = 0$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $9^{\sigma\nu^2x} + 9^{\sigma\nu^2x} = 4$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2^x < 8$ ii) $3^{x^2} - 9 > 0$ iii) $e^x \leq 1$ iv) $e^{3x+2} + 1 < 0$ v) $e^x + 1 > 0$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $4^x - 32 \cdot 2^x > 0$ ii) $e^{2x} - e \cdot e^x < 0$ iii) $e^{x^2} \leq \frac{1}{e^x}$ iv) $e^{x+2} > \frac{1}{e^x}$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$ ii) $e^{2x} - (1+e)e^x + e > 0$ iii) $e^{2x} - (e-2)e^x - 2e < 0$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{3 \cdot 2^x - 1}{2 \cdot 4^x} > 1$ ii) $\frac{6 - 3^x}{3^x - 1} > \frac{3^x}{2}$

16. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^{x+2y} = 1024 \\ 5^{x-3y-1} = \frac{1}{25} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} e^{4x} \cdot e^y = \frac{1}{e^2} \\ x \cdot y = -2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} e^{x+1} \cdot e^{y-1} = 1 \\ e^x : e^y = e^2 \end{cases}$

17. Αν οι αριθμοί $a = e^{2x} - \lambda^2$, $\beta = e^x - \lambda$, $\gamma = e^{3x} - 3\lambda^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 3, να βρείτε τους x και λ.

Λογάριθμοι

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log 4 + \log 5 - \log 2 = 1$ ii) $\ln 4 - \ln 12 + \ln 3 = 0$ iii) $2\log 3 + 3\log 2 - 2\log 6 = \log 2$
iv) $\frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{3} \ln 64 + \ln 4 = \ln 3$ v) $2\log_3 \sqrt{3} + 6\ln \sqrt[3]{e} - 2\log \sqrt[4]{10} = \frac{5}{2}$
vi) $\frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$

2. Να αποδείξετε ότι:

i) $4^{\log_2 3} + 100^{\log 2} - e^{3\ln 2} = 5$ ii) $3^{\log_3 5 + \log_3 2} = 10$ iii) $e^{\ln 2 - 2\ln 3} = \frac{2}{9}$ iv) $3^{1+2\log_3 \sqrt{2}} = 6$
v) $e^{1-3\ln 2} = \frac{e}{8}$ vi) $4^{\frac{1}{2}\log_2 5} + 1000^{1+\frac{1}{3}\log 5} + e^{\frac{1}{2}\ln 100} = 5015$

3. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο ο $1^{\text{ος}}$ όρος είναι $\ln a$ και ο $2^{\text{ος}}$ $\ln b$ να δείξετε ότι το

άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι: $S_n = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}}$

4. Αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5. Έστω η ακολουθία $\alpha_n = \ln 2^n$.

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία α_n είναι αριθμητική πρόοδος

β) Να δείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι: $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \ln 2$

6. Να βρείτε το θετικό αριθμό x , ώστε να ισχύει:

$$\ln x + \ln x^4 + \ln x^7 + \dots + \ln x^{100} = 3434$$

7. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

i) $f(x) = \log(x^2 - 1)$

ii) $f(x) = \ln \frac{x-3}{5-x}$

iii) $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

iv) $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e - e^x}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 4$

ii) $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

iii) $\ln x^2 - \ln(2x-2) = \ln 2e - 1$ iv) $\frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$

v) $\ln \sqrt{x} = \ln^2 x$

vi) $\ln 2^{x-1} = x + 2$

vii) $\ln^3 x + \ln x = 0$

viii) $2 \log^2 x + 5 \log x - 3 = 0$

ix) $(2 \ln x - 1) \ln x = 1$

x) $\ln^2 x = \frac{2}{\ln x + 1}$

9. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \ln 5 + y \ln 2 = \ln 20 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} x + \ln y = 1 \\ y = e^x + 1 - e \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} \ln \frac{x}{e} - 1 = 0 \\ \ln x - \ln^2 y = -1 \end{cases}$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} = 26$

ii) $5^{x+2} - 3^x = 5^x + 2 \cdot 3^{x-1}$

iii) $\ln(e^x + 9 - e) = 1 - x + \ln 9$

iii) $4^{\ln x} - 2^{\ln x} - e^{2 \ln \sqrt{2}} = 0$ iv) $100^{1 + \frac{1}{2} \log x} + 1000^{\frac{1}{3} \log(x-1) - 1} = 1$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$

ii) $5^{\ln x} - 3^{\ln x - 1} = 3^{\ln x + 1} - 5^{\ln x - 1}$

12. i) Να δείξετε ότι: $2^{\ln x} = x^{\ln 2}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $4^{\ln x} - 9 \cdot x^{\ln 2} + 8 = 0$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^{\ln^2 x} = \frac{x^3}{e^2}$

ii) $x^{\ln x} = e^3 \cdot x^2$

iii) $\sqrt{x^{\ln \sqrt{x}}} = e$

14. i) Να δείξετε ότι: $x^{\ln y} = y^{\ln x}$ με $x, y > 0$

ii) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^{\ln x} + y^{\ln x} = 2e \\ \ln \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

15. Να λύσετε την εξίσωση: $(4x)^{\ln 2 + \ln \sqrt{x}} = e^2$