

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$i. f(x) = \ln \frac{x-3}{5-x} \quad ii. f(x) = \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+2} \quad iii. f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e-e^x} \quad iv. f(x) = \log \frac{x^2-4}{9-x^2}$$

$$v. f(x) = \sqrt{\ln x - 1} \quad vi. f(x) = \sqrt{3^x - 2} \quad vii. f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3 \ln x + 2} \quad viii. f(x) = \sqrt{\frac{\ln x - 2}{3 - \ln x}}$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i. 2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x \quad ii. \ln^2 x - \ln(2x-2) = \ln 2e - 1$$

$$iii. \frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3} \quad iv. \ln \sqrt{x} = \ln^2 x \quad v. \ln 2^{x-1} = x + 1$$

$$vi. 2 \log^2 x + 5 \log x - 3 = 0 \quad vii. \ln^2 x - (e + e^2) \ln x + e^3 = 0$$

$$viii. \ln(e^x + 9 - e) = 1 - x + \ln 9 \quad ix. 5^{\ln x} - 3^{\ln x - 1} = 3^{\ln x + 1} - 5^{\ln x - 1}$$

$$x. x^{\ln^2 x} = \frac{x^3}{e^2} \quad xi. x^{\ln x} = e^3 \cdot x^2 \quad xii. (4x)^{\ln^2 + \ln \sqrt{x}} = e^2 \quad xiii. x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$$

$$xiv. 4^{\ln x} - 2^{\ln x} - e^{2 \ln \sqrt{2}} = 0 \quad xv. 100^{1 + \frac{1}{2} \log x} + 1000^{\frac{1}{3} \log(x-1) - 1} = 1 \quad xvi. \ln(e^x - 3) + x = 2 \ln 2$$

$$xvii. 4^{\ln x} - 9 \cdot x^{\ln^2} + 8 = 0 \quad xviii. \ln(e^{2x} + 2) = x + \ln 3 \quad ix. x + \ln(e^x - 1) = \ln 20$$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(5 - 3^x)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της με τους άξονες.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 0$.

4. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \ln(\ln(x-1))$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής με τον $\chi\chi'$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 0$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (2 \ln a - 1)^x$

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η συνάρτηση ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} .

ii. Να βρείτε το a ώστε η συνάρτηση να είναι γνήσια αύξουσα.

6. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \ln(e^x - 3^{x-1})$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = x - 2 \ln 2$

7. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = x^{\ln x}$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 \cdot e^3$

ii. Να αποδείξετε ότι: $f(2\theta) > \theta^{\ln 4}$ όπου $\theta > 0$.

8. Αν α, β θετικοί και οι αριθμοί $\alpha^2, 17\alpha\beta, \beta^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής

προόδου, να δείξετε ότι: $\ln \frac{\alpha + \beta}{6} = \frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις: i. $\frac{2 \ln x + 1}{\ln x + 1} > 1$ ii. $\frac{e^{2x} - 3}{e^x - 1} < 3$